

# Inhaltsverzeichnis

## Lineare und quadratische Gleichungen

Lineare Gleichungen mit einer Variablen	2
Quadratische Gleichungen mit einer Variablen, Sätze von VIETA	5
Gleichungen mit Bruchtermen	7

## Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme (2 Gleichungen mit 2 Variablen)	9
Lineare Gleichungssysteme (3 Gleichungen mit 3 Variablen)	10

## Gleichungen höheren Grades

Gleichungen höheren Grades (Kubische Gleichungen mit ganzzahligen Lösungen)	11
Gleichungen höheren Grades (Biquadratische Gleichungen)	12
Gleichungen höheren Grades (Allgemeine Gleichungen 4. Grades)	13

## Wurzel-, Exponential- und Logarithmusgleichungen

Wurzelgleichungen	14
Exponentialgleichungen	18
Logarithmische Gleichungen	21

## Goniometrische Gleichungen

Goniometrische Gleichungen mit einer trigonometrischen Funktion	25
Goniometrische Gleichungen mit zwei trigonometrischen Funktionen	28
Goniometrische Gleichungen mit Winkelfunktionen des einfachen und doppelten Winkels	30

Lineare Gleichungen mit einer Variablen

**Gegeben** sind lineare Gleichungen vom Typ:  $ax + b - [cx + d + e(fx + g) + h] = k(lx + m)$

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle lineare Gleichung mit der Variablen x.

**Beispiel:** Setzt man die Zahlen der ersten Zeile ein, dann erhält man die Gleichung

$$-7x - 2 - [6x + 11 + 8(-7x + 0) + 10] = -11(-4x + 1)$$

**Ermittle** die Lösung dieser Gleichung.

$$\begin{aligned} -7x - 2 - [6x + 11 - 56x + 10] &= 44x - 11 \\ -7x - 2 - [-50x + 21] &= 44x - 11 \\ -7x - 2 + 50x - 21 &= 44x - 11 \\ 43x - 23 &= 44x - 11 \\ -x &= 12 \\ x &= -12 \end{aligned}$$

Koeffizienten											Lösung	
a	b	c	d	e	f	g	h	k	l	m	x =	
-7	-2	6	11	8	-7	0	10	-11	-4	1	-12.00	1
12	4	-15	-9	-1	-7	-10	4	3	7	-3	8.00	2
5	6	-6	13	-1	10	-15	-5	-4	-4	8	-3.00	3
-9	9	12	-5	1	1	-1	-7	0	11	-7	1.00	4
-1	-6	5	3	1	10	11	7	1	-6	-7	-2.00	5
15	10	10	11	4	8	14	11	13	-2	2	-94.00	6
10	9	8	-9	1	-8	-6	-6	11	1	-1	41.00	7
13	-6	8	12	2	10	5	-10	8	4	-14	2.00	8
0	-9	10	11	-5	1	-12	-3	12	7	1	-1.00	9
11	5	4	-12	4	2	1	5	0	-9	-6	8.00	10
9	7	10	-10	15	-1	6	-3	4	8	-13	-1.00	11
8	-6	6	10	-4	-11	6	8	-4	-3	0	0.00	12
14	-1	1	-4	12	-6	-9	5	-13	-6	15	-43.00	13
0	-4	-9	-7	-1	7	-15	4	-15	-1	14	-194.00	14
0	-4	5	10	-1	0	-9	7	-5	10	6	0.00	15
2	-10	2	-4	-5	5	-7	10	9	2	13	24.00	16
10	-5	-12	-8	14	11	15	2	-11	11	12	-7.00	17
-2	5	6	-10	14	2	-14	4	9	0	-5	7.00	18
-13	3	13	4	2	-4	-13	1	12	0	11	-6.00	19
13	3	-12	13	-10	-5	-2	-4	-3	8	6	-8.00	20
4	-2	-1	6	-7	-6	1	-2	8	-1	11	-3.00	21
-3	6	-10	14	4	-10	0	0	-4	-10	-5	4.00	22
-13	7	12	-7	-1	11	-7	-11	-15	1	-12	162.00	23
-12	1	-8	-7	-3	-1	13	-2	14	7	11	-1.00	24
-8	3	-2	4	2	-9	-5	1	-2	11	13	-1.00	25
-14	-7	-10	13	9	-3	4	8	8	2	13	24.00	26
7	-6	14	-3	1	4	4	-9	-7	-2	-11	-3.00	27
-7	-2	10	2	13	-4	-5	-9	-10	-9	-7	0.00	28
6	0	15	3	6	3	-15	6	6	-4	10	7.00	29
-11	-10	8	1	-3	-4	11	-6	-14	1	15	14.00	30
11	-6	-14	-9	-13	-3	12	7	6	-2	-1	79.00	31
-13	-4	11	-6	-5	1	-13	10	2	-7	11	-19.00	32
14	1	-15	-7	-6	-8	-13	4	-3	11	-8	7.00	33
12	8	11	-4	-2	0	5	9	-6	1	-8	5.00	34
14	-8	1	10	2	2	-2	4	-6	-1	-15	36.00	35
-12	-2	12	0	-9	-6	-8	-10	10	-7	-12	7.00	36
-10	3	-2	-7	2	-11	-6	8	6	3	5	-4.00	37
0	-11	-2	1	-3	10	11	3	-6	-5	10	-39.00	38
14	-8	2	11	-4	-2	-15	-11	0	9	-6	17.00	39
-3	-9	-3	4	-11	-3	15	11	3	-10	-2	49.00	40
-5	3	3	5	5	-5	5	6	2	6	6	9.00	41
-6	6	5	5	4	7	-13	-6	1	-11	3	2.00	42
-7	6	-10	0	3	-6	0	3	1	0	3	0.00	43
4	8	2	5	0	6	8	8	1	3	-1	-4.00	44
-5	10	15	7	11	5	2	-1	-13	4	-11	-7.00	45
13	-8	4	-14	10	-2	-7	7	-3	-11	-11	9.00	46
8	-8	10	6	-7	-10	-14	-4	-12	4	-15	-12.00	47
5	11	-11	-6	2	2	-2	9	12	-1	-13	-7.00	48
12	9	12	11	1	6	-13	-5	-10	1	-14	31.00	49
6	-8	-4	-6	-13	2	-4	-7	7	9	1	-2.00	50

Lineare Gleichungen mit einer Variablen

**Gegeben** sind lineare Gleichungen vom Typ:  $(ax + b)^2 + c \cdot (dx + e) = f \cdot (gx^2 + h) + k$

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle lineare Gleichung mit der Variablen x.

**Beispiel:** Setzt man die Zahlen der ersten Zeile ein, dann erhält man die Gleichung

$$(x + 4)^2 - 5 \cdot (3x + 5) = (x^2 + 1) - 3$$

**Ermittle** die Lösung dieser Gleichung.

$$\begin{aligned} (x + 4)^2 - 5 \cdot (3x + 5) &= (x^2 + 1) - 3 \\ x^2 + 8x + 16 - 15x - 25 &= x^2 - 2 \\ x^2 - 7x - 9 &= x^2 - 2 \\ -7x - 9 &= -2 \\ -7x &= 7 \\ x &= \frac{7}{-7} = -1 \end{aligned}$$

Koeffizienten									Lösung	
a	b	c	d	e	f	g	h	k	x =	
1	4	-5	3	5	1	1	1	-3	-1.00	1
-2	-1	-1	3	3	1	4	1	-3	0.00	2
0	1	1	1	5	0	-4	1	-2	-8.00	3
0	-3	1	-1	-2	0	1	4	3	4.00	4
-1	-1	4	0	1	1	1	-5	0	-5.00	5
-3	4	-2	-1	4	3	3	-3	-5	1.00	6
-3	-2	0	-3	-5	3	3	-1	-5	-1.00	7
-2	1	4	4	3	-2	-2	-2	-3	-1.00	8
0	4	-1	3	-2	-4	0	5	-4	14.00	9
2	-1	-1	-3	-5	-2	-2	5	-4	20.00	10
-2	-3	5	-4	3	4	1	-5	4	5.00	11
0	2	-1	-2	-3	2	0	5	1	2.00	12
4	5	5	5	-2	4	4	4	-1	0.00	13
0	2	1	-1	-2	0	-4	2	-5	7.00	14
-5	4	-5	-4	5	5	5	-2	1	0.00	15
-2	1	1	-5	-1	-1	-4	5	-4	1.00	16
0	5	-1	-2	-3	0	2	3	2	-13.00	17
2	-3	4	2	-2	-4	-1	5	1	5.00	18
0	4	-5	-4	-5	0	2	3	1	-2.00	19
0	3	-5	1	-2	0	-1	-4	4	3.00	20
0	-4	1	1	5	0	2	0	2	-19.00	21
0	3	2	1	4	0	3	-2	-3	-10.00	22
2	2	1	-5	4	-1	-4	-4	4	0.00	23
-2	0	4	1	4	-2	-2	-5	-2	-2.00	24
-2	-3	-2	5	3	2	2	5	3	5.00	25
2	3	2	2	-4	1	4	-2	3	0.00	26
0	-2	-4	1	-1	0	4	1	0	2.00	27
-2	5	-2	0	1	1	4	5	-2	1.00	28
-4	-2	1	-1	-1	4	4	-4	4	-1.00	29
-3	2	-3	-3	-2	3	3	-2	4	4.00	30
0	4	-5	-1	5	4	0	-1	5	2.00	31
-3	-1	1	-5	-2	3	3	-4	3	-8.00	32
0	4	-1	3	1	0	0	4	-3	6.00	33
-2	-2	5	-3	4	4	1	-1	5	1.00	34
-5	0	1	3	-2	5	5	-2	5	-1.00	35
0	-4	-4	-1	1	-4	0	-4	-4	0.00	36
0	-3	-1	-1	-5	0	-5	-2	-1	-15.00	37
0	1	2	1	1	0	1	0	1	-1.00	38
0	-2	-1	3	-3	-5	0	2	5	4.00	39
3	5	5	-5	-4	3	3	-4	2	-3.00	40
0	-3	-1	-1	5	0	-3	-5	-2	-6.00	41
0	0	3	1	-2	0	2	0	0	2.00	42
0	-1	2	-3	2	3	0	0	-1	1.00	43
-2	1	2	-1	-3	2	2	-4	3	0.00	44
0	-4	1	1	4	0	2	1	2	-18.00	45
0	-4	-3	-1	-4	-5	0	2	2	-12.00	46
2	2	2	1	-1	4	1	-1	-4	-1.00	47
0	-2	3	5	-3	-4	0	-2	2	1.00	48
-4	-3	-2	5	-2	-4	-4	0	-1	-1.00	49
2	0	3	-2	4	4	1	-3	0	4.00	50

Lineare Gleichungen mit einer Variablen

**Gegeben** sind lineare Gleichungen vom Typ:  $\frac{ax+b}{n_1} + \frac{cx+d}{n_2} + \frac{e}{n_3} = \frac{fx+g}{n_4} + \frac{hx+k}{n_5}$

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle lineare Gleichung mit der Variablen x.

**Beispiel:** Setzt man die Zahlen der ersten Zeile ein, dann erhält man die Gleichung

$$\frac{-11x-4}{3} + \frac{4x+1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{-6x+12}{6} + \frac{-8x+2}{4}$$

**Ermittle** die Lösung dieser Gleichung.

$$\begin{aligned} \frac{-11x-4}{3} + \frac{4x+1}{3} + \frac{1}{6} &= \frac{-6x+12}{6} + \frac{-8x+2}{4} \quad | \cdot 12 \text{ (Hauptnenner)} \\ -44x-16+16x+4+2 &= -12x+24-24x+6 \\ -28x-10 &= -36x+30 \\ 8x &= 40 \\ x &= \frac{40}{8} = 5 \end{aligned}$$

Koeffizienten																Lösung	
a	b	c	d	e	f	g	h	k	n1	n2	n3	n4	n5	x =			
-11	-4	4	1	1	-6	12	-8	2	3	3	6	6	4	5.00	1		
12	7	-7	0	8	6	10	-7	0	9	6	9	3	7	-2.00	2		
6	-7	7	-6	-12	-7	-5	11	9	3	6	9	3	8	1.00	3		
6	10	-12	2	10	0	7	11	0	2	7	8	7	8	62.00	4		
-8	1	3	-3	-9	-3	9	1	-4	8	9	8	3	4	40.00	5		
-8	4	11	-9	6	-4	-12	3	-4	4	5	2	3	2	-246.00	6		
5	-6	-9	6	11	10	5	-7	-1	9	3	6	9	2	56.00	7		
7	1	-7	-1	-7	1	-9	-6	1	3	3	3	2	6	-4.00	8		
3	9	-10	-5	-10	0	1	-3	-9	4	8	2	8	8	-19.00	9		
1	-11	0	4	12	-4	-7	8	-4	5	9	6	9	9	6.00	10		
-10	2	12	3	3	-11	9	10	-3	3	3	3	4	3	-17.00	11		
-9	-2	5	-12	4	-5	11	8	-9	9	4	8	8	9	-223.00	12		
5	-1	6	12	-10	7	5	9	1	3	9	2	7	7	102.00	13		
-1	11	10	-12	3	-2	4	12	6	2	8	2	3	9	-42.00	14		
6	12	5	-11	-2	6	-4	8	-5	3	9	5	6	5	91.00	15		
0	-12	-1	-12	7	12	-2	11	7	4	4	2	8	8	-1.00	16		
-6	8	-5	-6	1	1	5	-11	-9	4	5	5	3	4	19.00	17		
3	-4	3	6	-7	11	10	4	9	2	3	3	9	2	-11.00	18		
9	1	-9	-5	12	6	9	8	-10	5	6	4	5	6	1.00	19		
-12	10	11	-7	-6	-4	0	1	-2	5	6	4	6	6	-5.00	20		
4	-11	-7	3	-12	-8	-3	9	-5	7	5	7	3	5	18.00	21		
0	5	-12	1	-12	-9	4	-11	0	5	7	7	7	7	1.00	22		
10	-5	4	-6	0	1	-8	10	-11	6	8	5	8	8	-1.00	23		
9	-10	9	6	4	-7	1	-3	-9	2	2	4	8	8	0.00	24		
0	-12	-2	-12	-2	-12	7	7	9	4	2	6	6	2	-6.00	25		
6	1	9	-10	5	7	-7	5	-12	9	8	5	6	9	-34.00	26		
12	-12	-3	11	0	6	0	-5	-10	9	3	6	9	6	-8.00	27		
-6	-9	0	3	-4	-1	-9	-7	-9	2	2	4	6	3	1.00	28		
-4	-12	-4	0	5	-3	6	-10	-12	4	8	2	9	9	3.00	29		
8	-9	2	-4	3	10	-10	-8	7	3	8	9	2	4	1.00	30		
8	-2	-12	-9	4	-7	9	3	11	6	5	2	4	4	-77.00	31		
9	0	-12	-2	-9	-9	3	-12	-6	5	2	9	3	2	0.00	32		
-11	-12	6	-4	-7	-9	-11	-12	-11	3	2	8	8	2	0.00	33		
2	8	-10	0	12	-6	0	-4	-4	9	4	4	4	6	41.00	34		
1	11	-6	2	12	-2	-8	-8	7	2	3	5	5	3	-5.00	35		
-1	8	-7	6	2	5	5	-5	2	2	9	9	3	2	5.00	36		
1	-1	-8	11	1	-6	10	-10	-7	6	3	2	7	6	-157.00	37		
6	-6	-2	3	7	4	5	2	-2	4	4	4	9	3	10.00	38		
-7	5	9	10	-4	-9	-1	9	-4	4	4	3	4	3	16.00	39		
-9	-12	3	-11	12	-11	-8	7	-9	9	8	6	3	3	-7.00	40		
-7	-10	11	-4	11	-4	-11	-11	-10	2	4	8	8	6	1.00	41		
-12	8	6	-3	0	-1	-5	-6	-7	4	6	4	7	2	-5.00	42		
2	-11	4	-12	-12	6	-12	1	-5	3	8	8	8	2	-32.00	43		
2	3	-8	10	-1	-12	6	4	-12	4	6	5	8	5	29.00	44		
5	0	-8	-6	0	4	-10	-5	-5	2	3	8	3	9	2.00	45		
8	-8	3	6	7	12	-2	-2	8	9	9	2	8	8	91.00	46		
-12	-12	12	0	-8	4	-5	-10	-12	4	4	3	3	9	-12.00	47		
-12	0	4	-6	-3	0	-9	7	-6	3	4	2	4	8	0.00	48		
2	-10	-3	9	-7	1	-5	-1	-7	6	9	3	2	8	1.00	49		
2	-10	10	7	4	7	8	-5	10	9	9	3	6	6	2.00	50		

Quadratische Gleichungen mit einer Variablen

**Gegeben** sind quadratische Gleichungen vom Typ:  $ax^2 + bx + c = 0$

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle quadratische Gleichung mit der Variablen x.

**Beispiel:** Setzt man die Zahlen der ersten Zeile ein, dann erhält man die Gleichung  $x^2 + 5x + 6 = 0$

**Ermittle** die Lösungen dieser Gleichung. Wende den Satz von VIETA an. Zerlege den Gleichungsterm in seine Linearfaktoren.

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

Setze die Werte  $p=5$  und  $q=6$  in die Lösungsformel  $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$  ein.

$$x_{1,2} = -2.5 \pm \sqrt{6.25 - 6} = -2.5 \pm 0.5$$

$$x_1 = -2, x_2 = -3$$

$$x_1 + x_2 = -5, x_1 \cdot x_2 = 6, (x - x_1) \cdot (x - x_2) = (x + 2) \cdot (x + 3)$$

Koeffizienten			Lösungen	Satz von Vieta		Linearfaktoren		
a	b	c		$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$	$a(x - x_1)(x - x_2)$		
1	5	6	Reell: -2.00, -3.00	-5.00	6.00	$1(x + 2.00)(x + 3.00)$	1	
-2	8	-6	Reell: 1.00, 3.00	4.00	3.00	$-2(x - 1.00)(x - 3.00)$	2	
-2	4	6	Reell: -1.00, 3.00	2.00	-3.00	$-2(x + 1.00)(x - 3.00)$	3	
2	-10	0	Reell: 5.00, 0.00	5.00	0.00	$2(x - 5.00)(x - 0.00)$	4	
-3	0	12	Reell: -2.00, 2.00	0.00	-4.00	$-3(x + 2.00)(x - 2.00)$	5	
-1	11	12	Reell: -1.00, 12.00	11.00	-12.00	$-1(x + 1.00)(x - 12.00)$	6	
1	1	-6	Reell: 2.00, -3.00	-1.00	-6.00	$1(x - 2.00)(x + 3.00)$	7	
-1	-10	11	Reell: -11.00, 1.00	-10.00	-11.00	$-1(x + 11.00)(x - 1.00)$	8	
2	-6	-8	Reell: 4.00, -1.00	3.00	-4.00	$2(x - 4.00)(x + 1.00)$	9	
1	2	1	Reell: -1.00, -1.00	-2.00	1.00	$1(x + 1.00)(x + 1.00)$	10	
1	6	5	Reell: -1.00, -5.00	-6.00	5.00	$1(x + 1.00)(x + 5.00)$	11	
-1	-12	-11	Reell: -11.00, -1.00	-12.00	11.00	$-1(x + 11.00)(x + 1.00)$	12	
6	6	-12	Reell: 1.00, -2.00	-1.00	-2.00	$6(x - 1.00)(x + 2.00)$	13	
-1	12	13	Reell: -1.00, 13.00	12.00	-13.00	$-1(x + 1.00)(x - 13.00)$	14	
-1	-8	-12	Reell: -6.00, -2.00	-8.00	12.00	$-1(x + 6.00)(x + 2.00)$	15	
-1	10	11	Reell: -1.00, 11.00	10.00	-11.00	$-1(x + 1.00)(x - 11.00)$	16	
1	-8	7	Reell: 7.00, 1.00	8.00	7.00	$1(x - 7.00)(x - 1.00)$	17	
2	-6	-8	Reell: 4.00, -1.00	3.00	-4.00	$2(x - 4.00)(x + 1.00)$	18	
1	-3	-4	Reell: 4.00, -1.00	3.00	-4.00	$1(x - 4.00)(x + 1.00)$	19	
1	-8	15	Reell: 5.00, 3.00	8.00	15.00	$1(x - 5.00)(x - 3.00)$	20	
2	-6	4	Reell: 2.00, 1.00	3.00	2.00	$2(x - 2.00)(x - 1.00)$	21	
2	-10	12	Reell: 3.00, 2.00	5.00	6.00	$2(x - 3.00)(x - 2.00)$	22	
-1	4	-3	Reell: 1.00, 3.00	4.00	3.00	$-1(x - 1.00)(x - 3.00)$	23	
-1	5	6	Reell: -1.00, 6.00	5.00	-6.00	$-1(x + 1.00)(x - 6.00)$	24	
-1	-6	-8	Reell: -4.00, -2.00	-6.00	8.00	$-1(x + 4.00)(x + 2.00)$	25	
-2	11	6	Reell: -0.50, 6.00	5.50	-3.00	$-2(x + 0.50)(x - 6.00)$	26	
-4	9	0	Reell: 0.00, 2.25	2.25	0.00	$-4(x - 0.00)(x - 2.25)$	27	
-4	10	6	Reell: -0.50, 3.00	2.50	-1.50	$-4(x + 0.50)(x - 3.00)$	28	
4	-9	2	Reell: 2.00, 0.25	2.25	0.50	$4(x - 2.00)(x - 0.25)$	29	
-2	3	9	Reell: -1.50, 3.00	1.50	-4.50	$-2(x + 1.50)(x - 3.00)$	30	
6	-9	-15	Reell: 2.50, -1.00	1.50	-2.50	$6(x - 2.50)(x + 1.00)$	31	
1	9	8	Reell: -1.00, -8.00	-9.00	8.00	$1(x + 1.00)(x + 8.00)$	32	
1	-7	10	Reell: 5.00, 2.00	7.00	10.00	$1(x - 5.00)(x - 2.00)$	33	
-4	3	7	Reell: -1.00, 1.75	0.75	-1.75	$-4(x + 1.00)(x - 1.75)$	34	
8	6	-5	Reell: 0.50, -1.25	-0.75	-0.62	$8(x - 0.50)(x + 1.25)$	35	
2	1	-6	Reell: 1.50, -2.00	-0.50	-3.00	$2(x - 1.50)(x + 2.00)$	36	
8	8	-6	Reell: 0.50, -1.50	-1.00	-0.75	$8(x - 0.50)(x + 1.50)$	37	
12	3	-15	Reell: 1.00, -1.25	-0.25	-1.25	$12(x - 1.00)(x + 1.25)$	38	
-4	-5	6	Reell: -2.00, 0.75	-1.25	-1.50	$-4(x + 2.00)(x - 0.75)$	39	
8	-10	-3	Reell: 1.50, -0.25	1.25	-0.38	$8(x - 1.50)(x + 0.25)$	40	
-2	-9	-9	Reell: -3.00, -1.50	-4.50	4.50	$-2(x + 3.00)(x + 1.50)$	41	
2	1	-10	Reell: 2.00, -2.50	-0.50	-5.00	$2(x - 2.00)(x + 2.50)$	42	
2	13	-15	Reell: 1.00, -7.50	-6.50	-7.50	$2(x - 1.00)(x + 7.50)$	43	
-4	-12	7	Reell: -3.50, 0.50	-3.00	-1.75	$-4(x + 3.50)(x - 0.50)$	44	
6	-15	6	Reell: 2.00, 0.50	2.50	1.00	$6(x - 2.00)(x - 0.50)$	45	
10	-5	-5	Reell: 1.00, -0.50	0.50	-0.50	$10(x - 1.00)(x + 0.50)$	46	
2	-5	-12	Reell: 4.00, -1.50	2.50	-6.00	$2(x - 4.00)(x + 1.50)$	47	
-4	-13	-9	Reell: -2.25, -1.00	-3.25	2.25	$-4(x + 2.25)(x + 1.00)$	48	
1	12	11	Reell: -1.00, -11.00	-12.00	11.00	$1(x + 1.00)(x + 11.00)$	49	
1	-13	12	Reell: 12.00, 1.00	13.00	12.00	$1(x - 12.00)(x - 1.00)$	50	

Quadratische Gleichungen mit einer Variablen

**Gegeben** sind quadratische Gleichungen vom Typ:  $ax^2 + bx + c = 0$

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle quadratische Gleichung mit der Variablen x.

**Beispiel:** Setzt man die Zahlen der ersten Zeile ein, dann erhält man die Gleichung

$$7x^2 - 11x - 6 = 0$$

**Ermittle** die Lösungen dieser Gleichung. Wende den Satz von VIETA an. Zerlege – im Fall von reellen Lösungen – den Gleichungsterm in seine Linearfaktoren.

$$7x^2 - 11x - 6 = 0$$

Setze die Werte  $a = 7, b = -11, c = -6$  in die Lösungsformel  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  ein.

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 168}}{14} = \frac{11 \pm \sqrt{289}}{14} = \frac{11 \pm 17}{14}$$

$$x_1 = \frac{28}{14} = 2, x_2 = \frac{-6}{14} \approx -0.43$$

$$x_1 + x_2 \approx 1.57, x_1 \cdot x_2 \approx -0.86, a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 7 \cdot (x - 2) \cdot (x + 0.43)$$

Koeffizienten a	b	c	Lösungen	Satz von Vieta		Linearfaktoren		
				$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$	$a(x - x_1)$	$(x - x_2)$	
7	-11	-6	Reell: 2.00, -0.43	1.57	-0.86	7(x - 2.00)	(x + 0.43)	1
8	-15	0	Reell: 1.88, 0.00	1.88	0.00	8(x - 1.88)	(x - 0.00)	2
12	10	-2	Reell: 0.17, -1.00	-0.83	-0.17	12(x - 0.17)	(x + 1.00)	3
4	-14	12	Reell: 2.00, 1.50	3.50	3.00	4(x - 2.00)	(x - 1.50)	4
4	-17	0	Reell: 4.25, 0.00	4.25	0.00	4(x - 4.25)	(x - 0.00)	5
-15	13	6	Reell: -0.33, 1.20	0.87	-0.40	-15(x + 0.33)	(x - 1.20)	6
15	-16	0	Reell: 1.07, 0.00	1.07	0.00	15(x - 1.07)	(x - 0.00)	7
7	-6	-1	Reell: 1.00, -0.14	0.86	-0.14	7(x - 1.00)	(x + 0.14)	8
-16	8	-5	Komplex: 0.25 ± 0.50i	0.50	0.31			9
14	-13	-10	Reell: 1.43, -0.50	0.93	-0.71	14(x - 1.43)	(x + 0.50)	10
16	8	-3	Reell: 0.25, -0.75	-0.50	-0.19	16(x - 0.25)	(x + 0.75)	11
15	-6	-9	Reell: 1.00, -0.60	0.40	-0.60	15(x - 1.00)	(x + 0.60)	12
3	-9	-12	Reell: 4.00, -1.00	3.00	-4.00	3(x - 4.00)	(x + 1.00)	13
-2	7	9	Reell: -1.00, 4.50	3.50	-4.50	-2(x + 1.00)	(x - 4.50)	14
20	-4	-3	Reell: 0.50, -0.30	0.20	-0.15	20(x - 0.50)	(x + 0.30)	15
-13	-4	-20	Komplex: -0.15 ± 1.23i	-0.31	1.54			16
15	5	-10	Reell: 0.67, -1.00	-0.33	-0.67	15(x - 0.67)	(x + 1.00)	17
-10	3	7	Reell: -0.70, 1.00	0.30	-0.70	-10(x + 0.70)	(x - 1.00)	18
5	1	0	Reell: 0.00, -0.20	-0.20	0.00	5(x - 0.00)	(x + 0.20)	19
10	-16	10	Komplex: 0.80 ± 0.60i	1.60	1.00			20
-19	-3	16	Reell: -1.00, 0.84	-0.16	-0.84	-19(x + 1.00)	(x - 0.84)	21
18	12	0	Reell: 0.00, -0.67	-0.67	0.00	18(x - 0.00)	(x + 0.67)	22
-20	-8	-8	Komplex: -0.20 ± 0.60i	-0.40	0.40			23
14	11	-15	Reell: 0.71, -1.50	-0.79	-1.07	14(x - 0.71)	(x + 1.50)	24
10	6	-4	Reell: 0.40, -1.00	-0.60	-0.40	10(x - 0.40)	(x + 1.00)	25
9	9	-10	Reell: 0.67, -1.67	-1.00	-1.11	9(x - 0.67)	(x + 1.67)	26
11	12	1	Reell: -0.09, -1.00	-1.09	0.09	11(x + 0.09)	(x + 1.00)	27
-14	6	0	Reell: 0.00, 0.43	0.43	0.00	-14(x - 0.00)	(x - 0.43)	28
1	-20	19	Reell: 19.00, 1.00	20.00	19.00	1(x - 19.00)	(x - 1.00)	29
10	-15	-10	Reell: 2.00, -0.50	1.50	-1.00	10(x - 2.00)	(x + 0.50)	30
-2	0	18	Reell: -3.00, 3.00	0.00	-9.00	-2(x + 3.00)	(x - 3.00)	31
-4	22	12	Reell: -0.50, 6.00	5.50	-3.00	-4(x + 0.50)	(x - 6.00)	32
4	-16	-9	Reell: 4.50, -0.50	4.00	-2.25	4(x - 4.50)	(x + 0.50)	33
18	8	-10	Reell: 0.56, -1.00	-0.44	-0.56	18(x - 0.56)	(x + 1.00)	34
2	11	5	Reell: -0.50, -5.00	-5.50	2.50	2(x + 0.50)	(x + 5.00)	35
11	-12	0	Reell: 1.09, 0.00	1.09	0.00	11(x - 1.09)	(x - 0.00)	36
-6	7	3	Reell: -0.33, 1.50	1.17	-0.50	-6(x + 0.33)	(x - 1.50)	37
-12	4	5	Reell: -0.50, 0.83	0.33	-0.42	-12(x + 0.50)	(x - 0.83)	38
4	-18	20	Reell: 2.50, 2.00	4.50	5.00	4(x - 2.50)	(x - 2.00)	39
-11	-12	20	Reell: -2.00, 0.91	-1.09	-1.82	-11(x + 2.00)	(x - 0.91)	40
8	-11	-10	Reell: 2.00, -0.62	1.38	-1.25	8(x - 2.00)	(x + 0.62)	41
-13	-22	-9	Reell: -1.00, -0.69	-1.69	0.69	-13(x + 1.00)	(x + 0.69)	42
-4	-15	-14	Reell: -2.00, -1.75	-3.75	3.50	-4(x + 2.00)	(x + 1.75)	43
-8	20	12	Reell: -0.50, 3.00	2.50	-1.50	-8(x + 0.50)	(x - 3.00)	44
5	14	17	Komplex: -1.40 ± 1.20i	-2.80	3.40			45
-5	15	-10	Reell: 1.00, 2.00	3.00	2.00	-5(x - 1.00)	(x - 2.00)	46
-6	-11	0	Reell: -1.83, 0.00	-1.83	0.00	-6(x + 1.83)	(x - 0.00)	47
12	-7	-5	Reell: 1.00, -0.42	0.58	-0.42	12(x - 1.00)	(x + 0.42)	48
-13	20	-17	Komplex: 0.77 ± 0.85i	1.54	1.31			49
17	16	0	Reell: 0.00, -0.94	-0.94	0.00	17(x - 0.00)	(x + 0.94)	50

Gleichungen mit Bruchtermen

**Gegeben** sind Gleichungen vom Typ:  $\frac{ax+b}{cx+d} + \frac{ex+f}{gx+h} = \frac{kx+l}{mx+n}$

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle Bruchgleichung mit der Variablen x.

**Beispiel:** Einsetzen der Zahlen der ersten Zeile ergibt die Gleichung  $\frac{4x+1}{-x+2} + \frac{-5x-1}{-2x+5} = \frac{3x+3}{-2x}$

**Ermittle** die Lösungen dieser Gleichung.

$$\frac{4x+1}{-x+2} + \frac{-5x-1}{-2x+5} = \frac{3x+3}{-2x} \quad | \cdot (-x+2)(-2x+5)(-2x) \dots \text{Hauptnenner}$$

$$(4x+1) \cdot (-2x+5) \cdot (-2x) + (-5x-1) \cdot (-x+2) \cdot (-2x) = (3x+3) \cdot (-x+2) \cdot (-2x+5)$$

$$(4x+1) \cdot (4x^2 - 10x) + (-5x-1) \cdot (2x^2 - 4x) = (-3x^2 + 3x + 6) \cdot (-2x+5)$$

$$16x^3 - 36x^2 - 10x - 10x^3 + 18x^2 + 4x = 6x^3 - 6x^2 - 12x - 15x^2 + 15x + 30$$

$$6x^3 - 18x^2 - 6x = 6x^3 - 21x^2 + 3x + 30$$

$$3x^2 - 9x - 30 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81+360}}{6} = \frac{9 \pm \sqrt{441}}{6} = \frac{9 \pm 21}{6}$$

$$x_1 = \frac{30}{6} = 5, x_2 = \frac{-12}{6} = -2$$

Koeffizienten												Lösungen		
a	b	c	d	e	f	g	h	k	l	m	n	x1	x2	
4	1	-1	2	-5	-1	-2	5	3	3	-2	0	5.00	-2.00	1
-2	-2	1	-5	0	-3	0	-3	7	5	4	2	1.00	-1.00	2
-2	4	0	4	0	1	0	-2	0	4	-1	-1	-3.00	3.00	3
-1	3	0	-3	3	-3	1	2	2	0	0	5	25.00	3.00	4
0	5	0	-5	-4	0	1	1	-3	5	-1	-5	-3.00	0.00	5
-5	0	4	-6	1	0	0	-2	-1	3	0	1	1.00	9.00	6
1	2	1	-6	-1	-1	-1	0	-4	-3	-2	6	-2.00	-6.00	7
7	3	3	-3	0	3	0	-3	5	4	4	7	-54.00	-1.00	8
-1	-5	-4	-5	-2	4	0	-1	-5	1	0	-3	-1.00	10.00	9
5	4	0	6	-5	4	-2	-4	-6	2	0	-6	0.00	19.00	10
-5	1	1	-5	0	3	0	-3	-1	1	0	7	1.00	47.00	11
1	3	-2	4	0	2	0	-2	-1	3	1	-5	-1.00	7.00	12
4	-2	0	-4	-2	-2	2	-4	-5	-1	0	4	-2.00	5.00	13
5	-1	1	-2	-5	3	0	-3	-7	-3	0	-6	-1.00	-4.00	14
1	-4	2	-1	-1	-1	1	-2	0	3	0	-3	1.00	11.00	15
0	2	0	3	-3	2	1	4	1	-4	0	3	-10.00	3.00	16
0	-1	-3	5	0	-4	0	5	1	2	-1	-5	5.00	5.00	17
7	0	-1	-6	2	0	0	4	-4	5	0	-2	-10.00	1.00	18
5	-3	1	1	5	1	0	-2	-7	1	0	3	23.00	1.00	19
-1	2	-1	0	-5	-4	2	4	6	-1	-4	-6	-4.00	-1.00	20
-4	-2	0	6	3	-2	0	3	-3	1	-1	-1	0.00	11.00	21
5	2	-1	1	-4	-4	-1	0	0	2	0	-3	-2.00	-6.00	22
-2	-5	0	6	4	-2	-1	3	-5	4	0	6	1.00	13.00	23
4	-1	0	-7	1	3	0	2	1	1	2	-2	15.00	2.00	24
0	1	0	1	-1	-1	-1	0	5	-2	2	-4	-2.00	-2.00	25
3	-5	-1	2	-5	-3	-3	-5	0	2	0	-2	1.00	-9.00	26
-4	5	-2	4	0	1	0	4	2	4	2	6	-4.00	1.00	27
-4	2	1	-5	-3	-3	2	5	0	5	0	-1	-4.00	-25.00	28
-4	2	0	5	5	0	0	5	5	2	1	5	18.00	0.00	29
2	2	4	5	2	2	0	-2	-3	-3	0	-3	-1.00	-1.00	30
4	4	1	0	0	-4	0	1	5	4	1	5	-2.00	2.00	31
6	-2	1	-1	-2	4	0	-4	-1	-1	0	-1	0.00	9.00	32
-6	-2	2	-6	4	-4	-3	-3	0	-4	0	1	-3.00	-17.00	33
6	0	0	6	-4	-2	0	5	5	-2	-1	5	-18.00	0.00	34
-6	2	0	4	3	-3	0	3	2	-1	2	2	-4.00	0.00	35
0	4	0	2	3	-4	-2	5	-5	-3	1	3	-1.00	3.00	36
-4	-2	0	3	-1	-2	0	-1	-3	-4	-4	-7	-2.00	2.00	37
0	-2	0	6	-2	2	-3	-3	1	-3	2	-4	3.00	-7.00	38
-1	3	-1	-1	3	1	0	2	-7	3	0	-4	1.00	7.00	39
1	0	-3	-6	-4	3	-3	4	-1	-5	-1	-4	-12.00	-1.00	40
-4	-4	-1	5	0	-1	0	-5	-2	-3	0	-5	15.00	-1.00	41
1	5	3	-1	4	4	-4	2	0	-5	0	5	-1.00	1.00	42
-5	-3	0	3	2	3	0	1	1	3	1	-1	3.00	-5.00	43
2	5	-2	-6	-2	0	-2	2	0	-4	-3	-5	-7.00	-7.00	44
4	3	-1	-3	0	1	0	1	1	0	-2	4	0.00	3.00	45
2	4	0	5	2	-2	-4	-2	-3	-3	0	-5	-3.00	1.00	46
-3	3	0	3	4	-3	0	5	4	-2	3	7	-8.00	1.00	47
3	-4	0	-2	-3	-2	-1	1	7	0	0	-7	11.00	0.00	48
0	-3	0	1	4	4	2	-2	5	-5	-4	1	-11.00	0.00	49
3	-1	0	1	-4	4	1	4	7	-1	0	3	2.00	1.00	50

Gleichungen mit Bruchtermen

**Gegeben** sind Gleichungen vom Typ:  $\frac{ax+b}{cx+d} + \frac{ex+f}{gx+h} = \frac{kx+l}{mx+n}$

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle Bruchgleichung mit der Variablen x.

**Beispiel:** Einsetzen der Zahlen der ersten Zeile ergibt die Gleichung  $\frac{3x+2}{-3x-1} + \frac{x-4}{-2x} = \frac{3x+5}{-2x+6}$

**Ermittle** die Lösungen dieser Gleichung.

$$\begin{aligned} & \frac{3x+2}{-3x-1} + \frac{x-4}{-2x} = \frac{3x+5}{-2x+6} \quad | \cdot (-3x-1)(-2x)(-2x+6) \dots \text{Hauptnenner} \\ (3x+2) \cdot (-2x) \cdot (-2x+6) + (x-4) \cdot (-3x-1) \cdot (-2x+6) &= (3x+5) \cdot (-3x-1) \cdot (-2x) \\ (-6x^2 - 4x) \cdot (-2x+6) + (-3x^2 + 11x + 4) \cdot (-2x+6) &= (-9x^2 - 18x - 5) \cdot (-2x) \\ 12x^3 - 28x^2 - 24x + 6x^3 - 22x^2 - 8x - 18x^2 + 66x + 24 &= 18x^3 + 36x^2 + 10x \\ -68x^2 + 34x + 24 &= 36x^2 + 10x \Leftrightarrow 104x^2 - 24x - 24 = 0 \quad | : 8 \\ 13x^2 - 3x - 3 &= 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+156}}{26} = \frac{3 \pm \sqrt{165}}{26} \\ x_1 &\approx 0.61, x_2 \approx -0.38 \end{aligned}$$

Koeffizienten												Lösungen		
a	b	c	d	e	f	g	h	k	l	m	n	x1	x2	
3	2	-3	-1	1	-4	-2	0	3	5	-2	6	-0.38	0.61	1
1	5	3	5	0	-4	0	1	5	-3	-1	-1	-1.76	4.26	2
-4	5	2	3	0	1	0	1	3	2	4	7	-1.72	2.08	3
4	1	-2	-4	-4	1	4	1	0	5	0	2	-0.11	-1.41	4
-7	1	0	-7	-3	4	4	1	-5	4	0	1	-0.01	0.58	5
-1	1	0	-6	2	4	0	-5	-6	4	-3	7	1.32	-11.70	6
-3	5	0	-3	-3	4	4	-5	-7	-2	0	5	0.92	1.17	7
-1	5	-2	-6	-2	4	-4	5	-1	-2	-1	-7	0.47	28.33	8
6	-5	0	-4	0	3	4	-5	-4	-1	0	-2	0.04	1.43	9
6	5	-2	-2	4	-1	0	-4	1	3	0	6	-3.00	-0.79	10
-3	-5	0	1	1	4	3	-1	-1	4	0	-6	0.58	-1.51	11
-4	3	-2	5	-5	2	1	-1	-6	-5	2	-3	0.73	2.10	12
-5	4	0	-6	-3	-2	1	-2	5	-1	0	-2	3.22	0.03	13
-2	1	-1	2	-4	-2	0	-4	5	0	0	3	0.58	5.17	14
-3	4	-2	7	-1	4	2	5	-4	-4	-4	-3	0.10	-0.40	15
0	-4	0	-5	-4	3	1	-2	7	1	2	-7	2.63	0.22	16
-7	3	2	6	-3	4	0	-3	-7	-5	0	5	-1.23	-0.17	17
7	-5	-4	7	-1	-2	0	2	4	-3	0	6	1.26	-1.44	18
-4	-5	3	1	-4	1	-4	4	0	-5	0	-1	-0.54	1.12	19
4	-1	0	-3	4	-2	-4	5	4	4	0	3	-0.60	1.10	20
-5	0	4	-5	0	3	0	-3	4	2	2	0	0.96	-0.31	21
0	4	4	-5	0	-3	3	-2	0	-2	-2	-1	2.26	0.24	22
-5	1	3	3	2	0	1	2	-1	5	-3	7	6.83	-0.23	23
-6	1	-1	-7	0	-1	0	-4	1	5	1	6	0.97	-5.97	24
-2	-5	1	-7	3	1	0	-4	5	1	0	-4	11.84	-0.84	25
0	2	-3	5	1	2	3	-2	1	-3	3	-1	0.51	2.36	26
1	-4	0	-1	1	4	0	-1	-1	2	-3	-3	0.24	-1.40	27
-5	5	-3	2	-4	-3	0	3	4	-5	0	-2	3.09	0.32	28
-1	2	-2	6	-5	-1	0	-3	-1	2	0	7	2.91	-0.22	29
1	-3	4	3	-1	4	-2	-3	3	-2	4	1	-0.03	-0.91	30
2	1	-3	-3	2	4	0	-3	-7	-5	0	-7	-0.77	-1.86	31
4	1	-2	-1	-3	3	-3	-2	-1	5	1	-3	-0.42	0.63	32
5	3	-1	2	4	0	0	3	2	-2	0	-3	5.00	-0.17	33
0	-3	0	-1	1	4	3	-3	-4	-3	3	-5	0.29	1.33	34
-6	4	0	-2	1	-2	0	3	1	0	-4	-3	0.76	-0.79	35
-1	3	1	4	0	-3	0	-3	4	-4	-3	0	0.46	-8.71	36
-1	0	2	1	0	3	3	3	0	-5	0	-6	0.10	-0.66	37
-2	4	-2	5	-5	1	0	-4	-5	-1	0	4	2.43	-0.33	38
-5	-2	-2	-7	0	1	4	-4	5	3	2	1	1.14	-0.59	39
-5	0	0	-2	5	1	-2	-2	-3	-3	0	-1	-0.61	-11.39	40
-2	-4	2	5	4	1	-3	3	-7	4	3	-2	0.62	-4.38	41
3	-1	-1	1	-4	4	-2	1	-4	2	4	-7	0.69	2.38	42
-1	1	0	7	-1	0	0	5	0	-5	2	0	-2.50	2.92	43
-4	2	0	3	-5	4	0	4	1	-4	2	5	-2.88	0.83	44
-4	5	-4	-5	3	-2	0	5	-3	5	0	5	-2.10	1.19	45
6	1	0	2	0	-1	0	4	-3	2	4	1	0.19	-0.77	46
2	2	3	-5	0	-4	0	-1	-4	1	-4	-5	1.25	-1.73	47
-5	4	0	-3	5	-2	0	3	-4	-5	3	4	-1.35	0.22	48
-5	-3	-2	-7	-5	1	-3	-4	0	-4	0	-3	-2.23	0.85	49
0	1	3	-3	0	3	0	-4	0	-2	-3	2	0.06	1.16	50



Lineare Gleichungssysteme (2 Gleichungen mit 2 Variablen)

**Gegeben** sind lineare Gleichungssysteme vom Typ:  $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man ein spezielles lineares Gleichungssystem mit der Variablen x und y.

**Beispiel:** Einsetzen der Zahlen der ersten Zeile ergibt das Gleichungssystem  $\begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ 4x + 7y = 11 \end{cases}$

**Ermittle** die Lösungen dieses Gleichungssystems.

$$\begin{cases} 2x + 3y = -5 \quad | \cdot (-2) \\ 4x + 7y = 11 \quad | \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 6y = 10 \\ 4x + 7y = 11 \end{cases} \text{ Gleichungen addieren ergibt } y=21$$

Setzte man diesen Wert z.B. in die 2.Gleichung ein, erhält man  $4x + 147 = 11 \Rightarrow 4x = -136 \Rightarrow x = -34$

Koeffizienten						Lösungen		
a1	b1	c1	a2	b2	c2	x	y	
2	3	-5	4	7	11	-34.00	21.00	1
6	-6	6	3	-6	9	-1.00	-2.00	2
9	0	0	9	-12	12	0.00	-1.00	3
-2	3	-6	-12	3	-6	0.00	-2.00	4
9	10	3	7	7	0	-3.00	3.00	5
11	-7	-4	7	-4	-3	-1.00	-1.00	6
-12	1	12	-2	0	12	-6.00	-60.00	7
-11	11	-11	9	4	9	1.00	0.00	8
-2	7	1	1	-4	-8	52.00	15.00	9
2	-2	6	-10	-8	-12	2.00	-1.00	10
11	0	-11	12	6	12	-1.00	4.00	11
-5	9	-9	12	-5	5	0.00	-1.00	12
-9	-9	0	-10	-8	-8	4.00	-4.00	13
-2	5	-9	3	-8	4	52.00	19.00	14
5	11	-12	-4	-9	-3	-141.00	63.00	15
1	-8	2	-5	-2	-10	2.00	0.00	16
3	1	-10	2	0	-6	-3.00	-1.00	17
8	0	8	-7	7	7	1.00	2.00	18
12	2	2	2	1	5	-1.00	7.00	19
-2	9	-1	1	-6	-10	32.00	7.00	20
5	-8	4	-4	7	-8	-12.00	-8.00	21
-1	1	-10	6	-5	-12	-62.00	-72.00	22
1	8	9	-2	-6	-8	1.00	1.00	23
-1	0	-12	-2	9	3	12.00	3.00	24
3	4	8	-1	-3	-1	4.00	-1.00	25
11	12	-9	-3	-9	-9	-3.00	2.00	26
-6	-6	6	8	5	1	2.00	-3.00	27
9	2	11	12	-3	9	1.00	1.00	28
-2	-7	0	-3	-9	-12	28.00	-8.00	29
-5	6	6	8	-11	-4	-6.00	-4.00	30
1	0	5	-9	-1	-9	5.00	-36.00	31
-6	-1	-11	-1	-1	-11	0.00	11.00	32
11	12	6	-1	-3	9	6.00	-5.00	33
-8	10	4	9	-11	-10	-28.00	-22.00	34
-5	-9	0	-9	-12	0	0.00	0.00	35
-6	4	12	-10	6	6	12.00	21.00	36
-9	7	-7	-10	10	10	7.00	8.00	37
-10	6	-4	-8	5	-5	-5.00	-9.00	38
-4	-3	5	8	10	-6	-2.00	1.00	39
-11	-3	-6	2	0	12	6.00	-20.00	40
-4	8	-4	7	4	-11	-1.00	-1.00	41
-1	-3	-9	4	-4	4	3.00	2.00	42
-7	-3	2	-9	-4	1	-5.00	11.00	43
5	4	-5	9	-9	-9	-1.00	0.00	44
-5	-3	6	4	3	-12	6.00	-12.00	45
1	4	0	1	2	10	20.00	-5.00	46
2	-1	12	12	-4	4	-11.00	-34.00	47
10	-9	-9	0	1	-9	-9.00	-9.00	48
0	-1	4	3	10	5	15.00	-4.00	49
-5	3	9	-12	6	-12	15.00	28.00	50

Lineare Gleichungssysteme (3 Gleichungen mit 3 Variablen)

**Gegeben** sind lineare Gleichungssysteme vom Typ: 
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man ein spezielles lineares Gleichungssystem mit der Variablen x und y und z.

**Beispiel:** Einsetzen der Zahlen der ersten Zeile ergibt das Gleichungssystem 
$$\begin{cases} -6x + 10y + 7z = 9 \\ 8x - 12y + 2z = 2 \\ 3x - 8y + z = -6 \end{cases}$$

**Ermittle** die Lösungen dieses Gleichungssystems.

$$\begin{cases} -6x + 10y + 7z = 9 \\ 8x - 12y + 2z = 2 \\ 3x - 8y + z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 10y + 7z = 9 \cdot 1 \\ 4x - 6y + z = 1 \cdot (-7) \\ 3x - 8y + z = -6 \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -34x + 52y = 2 \cdot (-1) \text{ Gleichungen addieren} \\ x + 2y = 7 \cdot 26 \text{ ergibt } 60x = 180 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

Aus z.B.  $x + 2y = 7$  folgt  $3 + 2y = 7 \Rightarrow y = 2$ .

Aus z.B.  $3x - 8y + z = -6$  folgt  $9 - 16 + z = -6 \Rightarrow z = 1$

Koeffizienten													Lösungen		
a1	b1	c1	d1	a2	b2	c2	d2	a3	b3	c3	d3	x	y	z	
-6	10	7	9	8	-12	2	2	3	-8	1	-6	3.00	2.00	1.00	
8	-12	6	-4	2	1	0	-7	8	7	-1	-3	-47.00	87.00	236.00	
2	-1	2	-3	-1	0	-2	-8	1	0	0	-4	-4.00	7.00	6.00	
-2	1	6	-10	-3	-1	3	5	-4	-5	-2	8	-17.00	16.00	-10.00	
-1	4	0	3	-7	12	-1	5	-1	10	3	9	1.00	1.00	0.00	
-2	4	-4	-2	-6	1	-3	-3	-7	-9	5	-8	15.00	-33.00	-40.00	
7	-12	4	-4	0	10	-2	-4	-5	4	-2	6	4.00	-5.00	-23.00	
3	-5	3	-8	-6	2	-4	6	3	-4	3	8	-35.00	16.00	59.00	
2	9	-2	3	5	-2	2	-3	7	12	-1	3	-1.00	1.00	2.00	
3	-8	3	-10	2	-3	1	9	5	-7	5	-4	13.00	2.00	-11.00	
1	-8	-1	-2	8	5	-4	-8	-4	-9	0	0	0.00	0.00	2.00	
-6	-3	-5	-8	3	-5	-5	2	4	0	1	0	-46.00	-212.00	184.00	
3	-1	5	-3	2	-4	1	-2	3	-8	0	-3	-1.00	0.00	0.00	
1	-9	-3	9	-1	2	-5	-9	1	-5	2	6	60.00	8.00	-7.00	
-9	1	6	-3	-1	-1	0	-3	7	0	-3	-9	-6.00	9.00	-11.00	
0	8	2	-10	-7	10	-3	-7	3	-6	1	9	-22.00	-8.00	27.00	
8	-3	1	3	5	-4	1	0	-2	-10	1	4	2.00	-3.00	-22.00	
-1	-10	2	5	0	12	-2	8	-7	-7	0	7	-5.00	4.00	20.00	
3	-2	-3	-5	-2	0	1	-9	-5	-11	-4	0	40.00	-44.00	71.00	
0	-4	6	8	-1	-4	7	4	-9	11	-5	-8	24.00	28.00	20.00	
-4	11	3	-7	3	3	-4	-9	1	-9	0	5	23.00	2.00	21.00	
-7	-3	1	-5	2	4	-2	2	-5	-7	3	9	4.00	-20.00	-37.00	
0	-7	-5	-6	-7	-6	4	4	-3	-12	-5	-4	136.00	-82.00	116.00	
-7	-8	-2	-9	1	-4	4	3	0	-9	6	9	15.00	-9.00	-12.00	
9	10	0	3	-7	5	6	-6	3	0	-2	5	-3.00	3.00	-7.00	
-5	-4	-1	-10	1	7	6	-3	-1	-1	1	-6	1.00	2.00	-3.00	
9	7	3	7	8	9	5	6	-8	1	2	10	-3.00	10.00	-12.00	
-3	12	-3	9	-1	9	-7	-9	1	-10	2	-1	-5.00	0.00	2.00	
-6	3	1	-9	-7	9	-1	8	-1	2	0	1	1.00	1.00	-6.00	
4	6	2	-8	-2	-4	3	-7	-5	-9	3	4	118.00	-73.00	-21.00	
6	5	5	7	-3	2	1	0	5	4	4	0	-28.00	-119.00	154.00	
8	3	7	-3	0	0	-3	9	3	-7	7	2	3.00	-2.00	-3.00	
5	3	-6	10	6	1	-3	-1	-4	2	-1	7	-19.00	-64.00	-59.00	
8	-10	7	4	2	2	1	-2	1	3	0	5	-58.00	21.00	72.00	
2	3	-2	-8	9	6	-3	-3	-4	-10	6	-6	-4.00	22.00	33.00	
2	-12	3	10	-2	5	-5	-6	1	-7	4	0	8.00	0.00	-2.00	
8	7	-2	0	-9	6	1	2	-8	4	1	-9	201.00	106.00	1175.00	
5	-1	-1	-1	2	6	-3	-8	-1	3	-1	-5	8.00	11.00	30.00	
-2	12	-5	-7	4	7	-5	8	9	4	-7	-7	10.00	9.00	19.00	
-4	5	6	-2	8	-7	-6	-2	-3	-3	7	-4	-1.00	0.00	-1.00	
-5	8	-4	2	8	-8	-2	4	0	5	-6	-9	-10.00	-9.00	-6.00	
8	12	-5	-10	-2	7	1	-7	-2	-4	-2	10	-1.00	-1.00	-2.00	
6	10	-3	5	-6	-4	3	7	-4	-12	-3	1	-4.00	2.00	-3.00	
4	12	-5	9	4	-10	2	-10	-3	4	0	1	-3.00	-2.00	-9.00	
9	10	5	4	-3	-9	0	-9	3	1	2	-5	-9.00	4.00	9.00	
5	-10	4	3	0	11	5	5	3	0	5	3	-19.00	-5.00	12.00	
7	-5	6	10	0	1	-1	1	8	6	-5	-9	-30.00	226.00	225.00	
-3	11	7	3	9	11	-7	7	9	4	-2	-10	-2.00	1.00	-2.00	
-3	-2	4	-6	-9	10	5	9	-1	-11	6	-5	104.00	45.00	99.00	
4	12	3	4	-4	-9	-4	-7	3	5	7	7	4.00	-1.00	0.00	

— Gleichungen höheren Grades (Kubische Gleichungen mit ganzz. Lösungen) —

**Gegeben** sind Gleichungen vom Typ:  $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle kubische Gleichung mit der Variablen  $x$ .

**Beispiel:** Einsetzen der Zahlen der ersten Zeile ergibt die Gleichung  $2x^3 - 6x^2 - 8x + 24 = 0$

**Ermittle** die Lösungen dieser Gleichung.

$x = 2$  ist wegen  $(16 - 24 - 16 + 24 = 0)$  eine Lösung dieser Gleichung.

Abspalten des Linearfaktors  $(x - 2)$  führt auf eine quadratische Gleichung.

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 6x^2 - 8x + 24) : (x - 2) = 2x^2 - 2x - 12 \\ \pm 2x^3 \mp 4x^2 \\ \hline -2x^2 - 8x \\ \mp 2x^2 \pm 4x \\ \hline -12x + 24 \\ \mp 12x \pm 24 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0 | : 2$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$x_1 = \frac{6}{2} = 3, x_2 = -\frac{4}{2} = -2$$

Koeffizienten				Lösungen			
a3	a2	a1	a0	x1	x2	x3	
2	-6	-8	24	3	-2	2	1
2	-22	-2	22	11	-1	1	2
-2	2	8	-8	-2	1	2	3
2	16	26	12	-6	-1	-1	4
1	-11	-14	24	-2	1	12	5
-1	-14	-25	-12	-12	-1	-1	6
-2	-8	2	8	1	-1	-4	7
9	-27	-9	27	-1	3	1	8
1	-3	-16	-12	-2	6	-1	9
-5	15	-0	-20	-1	2	2	10
-1	6	1	-30	5	3	-2	11
-4	-12	4	12	1	-3	-1	12
1	2	-13	10	2	1	-5	13
-11	-11	11	11	1	-1	-1	14
6	-18	-6	18	3	-1	1	15
1	-0	-21	-20	-1	5	-4	16
3	21	-3	-21	1	-7	-1	17
1	-3	-9	27	3	-3	3	18
1	-1	-5	-3	-1	-1	3	19
2	-2	-2	2	1	-1	1	20
-2	0	26	24	4	-1	-3	21
4	-4	-4	4	1	-1	1	22
-4	12	4	-12	1	-1	3	23
-1	-1	4	4	2	-1	-2	24
-1	-2	9	18	3	-3	-2	25
-4	-16	4	16	1	-1	-4	26
1	6	-15	8	1	1	-8	27
-5	10	5	-10	2	-1	1	28
-1	1	25	-25	1	-5	5	29
2	-8	-14	20	-2	5	1	30
-5	10	25	-30	1	3	-2	31
-3	3	27	-27	1	-3	3	32
-2	4	2	-4	2	1	-1	33
-1	-10	-13	24	1	-8	-3	34
1	-3	-1	3	3	1	-1	35
-1	-2	13	-10	2	-5	1	36
-12	-24	12	24	1	-2	-1	37
-9	0	27	-18	1	-2	1	38
-11	-22	11	22	-2	-1	1	39
-3	-18	-9	30	-2	1	-5	40
1	-7	11	-5	5	1	1	41
-5	-30	5	30	1	-6	-1	42
1	-9	-21	-11	-1	-1	11	43
8	-0	-24	-16	2	-1	-1	44
-1	-6	1	30	2	-5	-3	45
1	11	15	-27	-9	1	-3	46
-3	-27	3	27	-1	-9	1	47
-1	0	21	-20	1	-5	4	48
-1	5	17	-21	-3	1	7	49
-8	0	24	-16	-2	1	1	50

**Gleichungen höheren Grades (Biquadratische Gleichungen)**

**Gegeben** sind Gleichungen vom Typ:  $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle biquadratische Gleichung mit der Variablen x.

**Beispiel:** Einsetzen der Zahlen der ersten Zeile ergibt die Gleichung  $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$

**Ermittle** die Lösungen dieser Gleichung.

Die Substitution  $x^2 = u$  führt auf die quadratische Gleichung  $u^2 - 17u + 16 = 0$ .

$$u^2 - 17u + 16 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{17}{2} \pm \sqrt{\frac{289}{4} - 16} = \frac{17}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{17}{2} \pm \frac{15}{2}$$

$u_1 = 16,$   $u_2 = 1$  Die Werte von u werden in die Substitutionsgleichung  $x^2 = u$  eingesetzt.

$$x^2 = 16 \qquad x^2 = 1$$

$$x_1 = 4, x_2 = -4 \qquad x_3 = 1, x_4 = -1$$

Koeffizienten			Lösungen				
a	b	c	x1	x2	x3	x4	
1	-17	16	4	-4	1	-1	1
6	-30	24	2	-2	1	-1	2
20	-40	20	1	-1	1	-1	3
6	-48	96	2	-2	2	-2	4
8	-40	32	2	-2	1	-1	5
12	-60	48	2	-2	1	-1	6
9	-18	9	1	-1	1	-1	7
1	-18	81	3	-3	3	-3	8
5	-40	80	2	-2	2	-2	9
5	-50	45	3	-3	1	-1	10
3	-15	12	2	-2	1	-1	11
2	-10	8	2	-2	1	-1	12
6	-30	24	2	-2	1	-1	13
3	-6	3	1	-1	1	-1	14
1	-50	49	7	-7	1	-1	15
15	-30	15	1	-1	1	-1	16
20	-40	20	1	-1	1	-1	17
1	-8	16	2	-2	2	-2	18
1	-18	81	3	-3	3	-3	19
17	-34	17	1	-1	1	-1	20
2	-10	8	2	-2	1	-1	21
5	-40	80	2	-2	2	-2	22
1	-20	64	4	-4	2	-2	23
7	-35	28	2	-2	1	-1	24
3	-51	48	4	-4	1	-1	25
13	-65	52	2	-2	1	-1	26
1	-10	9	3	-3	1	-1	27
6	-60	54	3	-3	1	-1	28
3	-24	48	2	-2	2	-2	29
12	-24	12	1	-1	1	-1	30
3	-51	48	4	-4	1	-1	31
6	-60	54	3	-3	1	-1	32
1	-13	36	3	-3	2	-2	33
4	-20	16	2	-2	1	-1	34
6	-60	54	3	-3	1	-1	35
1	-2	1	1	-1	1	-1	36
3	-24	48	2	-2	2	-2	37
1	-37	36	6	-6	1	-1	38
7	-35	28	2	-2	1	-1	39
11	-55	44	2	-2	1	-1	40
4	-32	64	2	-2	2	-2	41
9	-45	36	2	-2	1	-1	42
18	-36	18	1	-1	1	-1	43
1	-20	64	4	-4	2	-2	44
14	-28	14	1	-1	1	-1	45
4	-40	36	3	-3	1	-1	46
4	-32	64	2	-2	2	-2	47
14	-28	14	1	-1	1	-1	48
8	-16	8	1	-1	1	-1	49
1	-5	4	2	-2	1	-1	50

— Gleichungen höheren Grades (Allgemeine Gleichungen 4. Grades) —

**Gegeben** sind Gleichungen vom Typ:  $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle Gleichung 4. Grades mit der Variablen  $x$ .

**Beispiel:** Einsetzen der Zahlen der ersten Zeile ergibt die Gleichung  $x^4 - 9x^3 + 13x^2 + 9x - 14 = 0$

**Ermittle** die rationalen Lösungen dieser Gleichung.

Durch Probieren erhält man die Lösungen  $x_1 = 1$  und  $x_2 = -1$ .

Spaltet man das Produkt der Linearfaktoren  $(x-1) \cdot (x+1) = x^2 - 1$  ab, so erhält man eine quadratische Gleichung mit den weiteren Lösungen.

$$(x^4 - 9x^3 + 13x^2 + 9x - 14) : (x^2 - 1) = x^2 - 9x + 14$$

$$\begin{array}{r} \pm x^4 \quad \mp x^2 \\ -9x^3 + 14x^2 + 9x \\ \mp 9x^3 \quad \pm 9x \\ \hline 14x^2 \quad -14 \\ \pm 14x^2 \quad \mp 14 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$x_{3,4} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 14} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{9}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$x_3 = 7, x_4 = 2$$

Koeffizienten					Lösungen				
a4	a3	a2	a1	a0	x1	x2	x3	x4	
1	-9	13	9	-14	-1	1	2	7	1
1	-5	3	5	-4	-1	4	1	1	2
1	4	-9	-16	20	-5	-2	2	1	3
1	-5	5	5	-6	1	3	-1	2	4
1	2	-7	-20	-12	-1	3	-2	-2	5
3	-12	9	12	-12	-1	2	2	1	6
2	10	10	-10	-12	1	-3	-2	-1	7
1	-2	-9	2	8	1	-1	4	-2	8
1	11	17	-11	-18	-1	-2	-9	1	9
4	-16	8	16	-12	-1	3	1	1	10
4	-12	4	12	-8	2	1	-1	1	11
1	-3	-2	12	-8	-2	2	1	2	12
1	4	2	-4	-3	-1	1	-3	-1	13
2	-12	16	12	-18	-1	3	1	3	14
2	-4	-18	4	16	4	-2	-1	1	15
1	-4	2	4	-3	1	1	-1	3	16
2	2	-12	-8	16	1	-2	2	-2	17
4	12	-20	-12	16	1	1	-1	-4	18
2	16	-20	-16	18	-1	-9	1	1	19
2	-16	12	16	-14	-1	1	1	7	20
1	5	5	-5	-6	-1	-2	-3	1	21
1	9	13	-9	-14	-1	-2	-7	1	22
1	5	-3	-13	10	-5	1	-2	1	23
2	14	18	-14	-20	-2	1	-5	-1	24
1	6	7	-6	-8	-2	-4	-1	1	25
2	12	14	-12	-16	1	-1	-2	-4	26
1	2	-7	-8	12	-2	2	-3	1	27
1	3	-2	-12	-8	2	-1	-2	-2	28
5	-10	-20	10	15	-1	-1	1	3	29
1	1	-6	-4	8	2	-2	-2	1	30
1	6	7	-6	-8	1	-4	-1	-2	31
1	10	8	-10	-9	-9	-1	-1	1	32
1	-6	7	6	-8	-1	1	2	4	33
3	6	-12	-6	9	1	1	-1	-3	34
1	1	-7	-1	6	2	-3	1	-1	35
1	6	-17	-6	16	2	-8	-1	1	36
1	-4	-6	4	5	1	-1	5	-1	37
5	10	-20	-10	15	-1	-3	1	1	38
2	8	4	-8	-6	1	-3	-1	-1	39
1	5	-7	-5	6	1	-1	-6	1	40
2	-10	10	10	-12	2	-1	1	-3	41
1	-4	-1	16	-12	1	2	3	-2	42
1	-3	-2	12	-8	2	1	-2	2	43
1	-0	-5	-0	4	2	-1	1	-2	44
2	10	6	-10	-8	-1	-1	-4	1	45
1	-11	17	11	-18	1	-1	9	2	46
2	6	-6	-14	12	1	-2	1	-3	47
2	6	-6	-14	12	1	-2	1	-3	48
1	6	8	-6	-9	1	-3	-1	-3	49
1	1	-7	-1	6	1	-1	2	-3	50

Wurzelgleichungen

**Gegeben** sind Gleichungen vom Typ:  $\sqrt{ax+b} = cx+d$

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle Wurzelgleichung mit der Variablen x.

**Beispiel:** Setzt man die Zahlen der ersten Zeile ein, dann erhält man die Gleichung  $\sqrt{x+2} = -3x-2$

**Ermittle** die rationalen Lösungen dieser Gleichung.

Definitionsbereich:  $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} = -3x-2 & \quad | \text{Gleichung quadrieren} \\ x+2 = (-3x-2)^2 & \\ x+2 = 9x^2+12x+4 & \\ 9x^2+11x+2=0 & \\ x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121-72}}{18} = \frac{-11 \pm 7}{18} & \\ x_1 = -\frac{2}{9} \notin \mathbb{Q}, x_2 = -1 \in \mathbb{Q} & \end{aligned}$$

Koeffizienten				Definitionsbereich	Lösungen		
a	b	c	d		x1	x2	
1	2	-3	-2	x >= -2.00	-1.00		1
2	0	-5	0	x >= 0.00	0.00		2
1	4	5	2	x >= -4.00	0.00		3
3	4	1	0	x >= -1.33	4.00		4
-3	-7	0	0	x <= -2.33	-2.33		5
1	-2	0	3	x >= 2.00	11.00		6
5	9	5	3	x >= -1.80	0.00		7
4	-3	3	-2	x >= 0.75	1.00		8
2	-1	4	-2	x >= 0.50	0.62	0.50	9
1	6	-1	0	x >= -6.00	-2.00		10
-4	2	2	-1	x >= 0.50	0.50		11
1	9	2	-3	x >= -9.00	3.25		12
1	4	-1	2	x >= -4.00	0.00		13
4	-4	2	-2	x >= 1.00	2.00	1.00	14
5	4	-5	2	x >= -0.80	0.00		15
-3	9	0	0	x <= 3.00	3.00		16
1	0	5	0	x >= 0.00	0.00		17
1	0	2	-3	x >= 0.00	2.25		18
2	-1	4	-2	x >= 0.50	0.62	0.50	19
5	-9	-1	3	x >= 1.80	2.00		20
4	-4	0	3	x >= 1.00	3.25		21
4	5	2	1	x >= -1.25	1.00		22
3	1	1	1	x >= -0.33	1.00	0.00	23
5	4	2	2	x >= -0.80	0.00	-0.75	24
2	-1	-2	3	x >= 0.50	1.00		25
-2	-9	0	0	x <= -4.50	-4.50		26
2	-7	0	2	x >= 3.50	5.50		27
2	2	5	-3	x >= -1.00	1.00		28
2	-1	4	-2	x >= 0.50	0.62	0.50	29
4	2	2	1	x >= -0.50	0.50	-0.50	30
1	6	-2	-2	x >= -6.00	-2.00		31
5	9	1	-1	x >= -1.80	8.00		32
5	0	2	0	x >= 0.00	1.25	0.00	33
4	-7	2	-3	x >= 1.75	2.00	2.00	34
1	2	-2	2	x >= -2.00	0.25		35
2	1	0	2	x >= -0.50	1.50		36
-4	4	1	-1	x >= 1.00	1.00		37
4	2	-2	3	x >= -0.50	0.50		38
3	1	1	-1	x >= -0.33	5.00		39
4	2	2	1	x >= -0.50	0.50	-0.50	40
-4	2	-2	1	x >= 0.50	0.50		41
2	2	-1	3	x >= -1.00	1.00		42
1	0	0	1	x >= 0.00	1.00		43
5	1	1	-1	x >= -0.20	7.00		44
5	-1	3	-1	x >= 0.20	1.00		45
3	9	1	3	x >= -3.00	0.00	-3.00	46
-4	3	4	-3	x >= 0.75	0.75		47
2	3	2	-3	x >= -1.50	3.00		48
4	-5	0	3	x >= 1.25	3.50		49
1	7	-2	1	x >= -7.00	-0.75		50

Wurzelgleichungen

**Gegeben** sind Gleichungen vom Typ:  $\sqrt{ax+b} = \sqrt{cx+d}$

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle Wurzelgleichung mit der Variablen x.

**Beispiel:** Setzt man die Zahlen der ersten Zeile ein, erhält man die Gleichung  $\sqrt{x-3} = \sqrt{-x+5}$

**Ermittle** die rationalen Lösungen dieser Gleichung.

Definitionsbereich:  $x-3 \geq 0$  und  $-x+5 \geq 0$   
 $x \geq 3$  und  $x \leq 5$ , also  $3 \leq x \leq 5$

$$\sqrt{x-3} = \sqrt{-x+5} \quad | \quad \text{Gleichung quadrieren}$$

$$x-3 = -x+5$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

Koeffizienten				Definitionsbereich	Lösung x	
a	b	c	d			
1	-3	-1	5	3.00 <= x <= 5.00	4.00	1
-8	3	8	5	-0.62 <= x <= 0.37	-0.12	2
8	3	4	6	x >= -0.37	0.75	3
1	7	5	-1	x >= 0.20	2.00	4
1	5	-4	0	-5.00 <= x <= 0.00	-1.00	5
4	1	8	1	x >= -0.12	0.00	6
8	3	-8	-3	x = -0.37	-0.38	7
1	3	3	-9	x >= 3.00	6.00	8
4	-1	8	-2	x >= 0.25	0.25	9
4	1	-1	1	-0.25 <= x <= 1.00	0.00	10
-1	0	7	2	-0.29 <= x <= 0.00	-0.25	11
8	8	-8	-8	x = -1.00	-1.00	12
-7	0	9	7	-0.78 <= x <= 0.00	-0.44	13
-1	6	1	2	-2.00 <= x <= 6.00	2.00	14
6	4	-2	0	-0.67 <= x <= 0.00	-0.50	15
-2	0	2	8	-4.00 <= x <= 0.00	-2.00	16
3	-2	2	-1	x >= 0.67	1.00	17
1	-3	2	-6	x >= 3.00	3.00	18
3	7	-5	-9	-2.33 <= x <= -1.80	-2.00	19
3	-2	-4	5	0.67 <= x <= 1.25	1.00	20
-3	-5	-1	1	x <= -1.67	-3.00	21
3	1	-9	-2	-0.33 <= x <= -0.22	-0.25	22
-6	4	3	4	-1.33 <= x <= 0.67	0.00	23
-3	-6	-2	4	x = -2.00	-2.00	24
8	-6	-8	8	0.75 <= x <= 1.00	0.88	25
-9	-9	-7	1	x <= -1.00	-5.00	26
7	-7	1	-1	x >= 1.00	1.00	27
-8	-4	-6	6	x <= -0.50	-5.00	28
2	1	3	-3	x >= 1.00	4.00	29
-1	0	6	0	x = 0.00	0.00	30
4	8	5	9	x >= -1.80	-1.00	31
1	3	-7	-3	-3.00 <= x <= -0.43	-0.75	32
2	-1	-8	-9	0.50 <= x <= 1.12	1.00	33
-4	-7	-3	-5	x <= -1.75	-2.00	34
-8	5	-4	7	x <= 0.62	-0.50	35
5	-4	1	9	x >= 0.80	3.25	36
7	1	-8	1	-0.14 <= x <= 0.12	0.00	37
-3	-3	-5	-5	x <= -1.00	-1.00	38
4	4	-9	4	-1.00 <= x <= 0.44	0.00	39
-1	3	4	8	-2.00 <= x <= 3.00	-1.00	40
-7	9	-3	9	x <= 1.29	0.00	41
9	4	8	9	x >= -0.44	5.00	42
2	5	-4	-7	-2.50 <= x <= -1.75	-2.00	43
2	-3	-2	3	x = 1.50	1.50	44
9	9	-3	0	-1.00 <= x <= 0.00	-0.75	45
2	2	3	1	x >= -0.33	1.00	46
3	7	4	9	x >= -2.25	-2.00	47
4	1	5	1	x >= -0.20	0.00	48
1	-7	-1	9	7.00 <= x <= 9.00	8.00	49
4	-4	-9	9	x = 1.00	1.00	50

Wurzelgleichungen

**Gegeben** sind Gleichungen vom Typ:  $\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d} = e$

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle Wurzelgleichung mit der Variablen x.

**Beispiel:** Setzt man die Zahlen der ersten Zeile ein, erhält man die Gleichung  $\sqrt{x-7} + \sqrt{-x+8} = 1$

**Ermittle** die ganzzahligen Lösungen dieser Gleichung.

Definitionsbereich:  $x-7 \geq 0$  und  $-x+8 \geq 0$   
 $x \geq 7$  und  $x \leq 8$ , also  $7 \leq x \leq 8$

$$\begin{aligned} \sqrt{x-7} + \sqrt{-x+8} &= 1 && | \text{Wurzeln isolieren} \\ \sqrt{x-7} &= 1 - \sqrt{-x+8} && | \text{Gleichung quadrieren} \\ x-7 &= 1 - 2\sqrt{-x+8} - x+8 && | \text{Wurzel isolieren} \\ 2\sqrt{-x+8} &= -2x+16 && | :2 \\ \sqrt{-x+8} &= -x+8 && | \text{Gleichung quadrieren} \\ -x+8 &= x^2 - 16x + 64 \Leftrightarrow x^2 - 15x + 56 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4} - 56} = \frac{15}{2} \pm \frac{1}{2} \\ x_1 &= 8, x_2 = 7 \end{aligned}$$

Koeffizienten					Definitionsbereich	Lösungen		
a	b	c	d	e		x1	x2	
-1	-7	-1	8	1	7.00 <= x <= 8.00	7.00	8.00	1
-5	9	5	4	1	-0.80 <= x <= 1.80	0.00	1.00	2
2	4	-4	1	3	-2.00 <= x <= 0.25	-2.00	0.00	3
5	4	-1	1	3	-0.80 <= x <= 1.00	0.00	1.00	4
1	8	-1	9	5	-8.00 <= x <= 9.00	-7.00	8.00	5
3	4	-2	9	5	-1.33 <= x <= 4.50	0.00	4.00	6
2	9	-3	4	5	-4.50 <= x <= 1.33	-4.00	0.00	7
4	9	-2	9	6	-2.25 <= x <= 4.50	0.00	4.00	8
-6	1	1	8	7	-8.00 <= x <= 0.17	-8.00	-4.00	9
-1	4	4	9	5	-2.25 <= x <= 4.00	0.00	4.00	10
1	-4	-1	5	1	4.00 <= x <= 5.00	4.00	5.00	11
1	9	-2	9	6	-9.00 <= x <= 4.50	-8.00	0.00	12
-1	7	1	-6	1	6.00 <= x <= 7.00	6.00	7.00	13
3	1	-1	1	2	-0.33 <= x <= 1.00	0.00	1.00	14
2	0	-4	9	3	0.00 <= x <= 2.25	0.00	2.00	15
1	9	-1	-8	1	-9.00 <= x <= -8.00	-9.00	-8.00	16
-1	8	5	-4	6	0.80 <= x <= 8.00	4.00	8.00	17
1	-6	-1	7	1	6.00 <= x <= 7.00	6.00	7.00	18
-6	1	1	8	7	-8.00 <= x <= 0.17	-8.00	-4.00	19
-1	7	2	-5	3	2.50 <= x <= 7.00	3.00	7.00	20
-1	8	1	1	3	-1.00 <= x <= 8.00	-1.00	8.00	21
3	4	-7	9	5	-1.33 <= x <= 1.29	-1.00	0.00	22
-5	-1	1	2	3	-2.00 <= x <= -0.20	-2.00	-1.00	23
2	3	-1	3	3	-1.50 <= x <= 3.00	-1.00	3.00	24
-5	-6	1	3	3	-3.00 <= x <= -1.20	-3.00	-2.00	25
-1	7	2	-5	3	2.50 <= x <= 7.00	3.00	7.00	26
5	1	-1	7	6	-0.20 <= x <= 7.00	3.00	7.00	27
1	4	-3	-8	2	-4.00 <= x <= -2.67	-4.00	-3.00	28
-2	7	2	3	4	-1.50 <= x <= 3.50	-1.00	3.00	29
-2	2	4	5	3	-1.25 <= x <= 1.00	-1.00	1.00	30
-4	1	4	9	4	-2.25 <= x <= 0.25	-2.00	0.00	31
7	2	-3	7	5	-0.29 <= x <= 2.33	1.00	2.00	32
1	8	-1	8	4	-8.00 <= x <= 8.00	-8.00	8.00	33
-1	4	1	1	3	-1.00 <= x <= 4.00	0.00	3.00	34
-2	8	2	-4	2	2.00 <= x <= 4.00	2.00	4.00	35
-1	3	1	1	2	-1.00 <= x <= 3.00	-1.00	3.00	36
-1	9	1	4	5	-4.00 <= x <= 9.00	0.00	5.00	37
1	9	-5	-9	6	-9.00 <= x <= -1.80	-9.00	-5.00	38
8	1	-4	4	3	-0.12 <= x <= 1.00	0.00	1.00	39
1	2	-1	-1	1	-2.00 <= x <= -1.00	-2.00	-1.00	40
1	4	-3	-8	2	-4.00 <= x <= -2.67	-4.00	-3.00	41
1	-6	-1	7	1	6.00 <= x <= 7.00	6.00	7.00	42
-4	9	2	0	3	0.00 <= x <= 2.25	0.00	2.00	43
1	9	-1	4	5	-9.00 <= x <= 4.00	-5.00	0.00	44
-1	5	1	0	3	0.00 <= x <= 5.00	1.00	4.00	45
1	6	-1	-5	1	-6.00 <= x <= -5.00	-6.00	-5.00	46
1	4	-1	6	4	-4.00 <= x <= 6.00	-3.00	5.00	47
-1	3	5	-6	3	1.20 <= x <= 3.00	2.00	3.00	48
-3	-5	1	3	2	-3.00 <= x <= -1.67	-3.00	-2.00	49
-1	1	1	3	2	-3.00 <= x <= 1.00	-3.00	1.00	50



Wurzelgleichungen

**Gegeben** sind Gleichungen vom Typ:  $\sqrt{ax+b} - \sqrt{cx+d} = e$

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle Wurzelgleichung mit der Variablen x.

**Beispiel:** Einsetzen der Zahlen der ersten Zeile ergibt die Gleichung  $\sqrt{5x+5} - \sqrt{-4x-3} = -1$

**Ermittle** die ganzzahligen Lösungen dieser Gleichung.

$$5x+5 \geq 0 \quad \text{und} \quad -4x-3 \geq 0$$

Definitionsbereich:  $x \geq -1$  und  $x \leq -\frac{3}{4} = -0.75$ , also  $-1 \leq x \leq -0.75$

$$\sqrt{5x+5} - \sqrt{-4x-3} = -1 \quad | \quad \text{Wurzeln isolieren}$$

$$\sqrt{5x+5} = -1 + \sqrt{-4x-3} \quad | \quad \text{Gleichung quadrieren}$$

$$5x+5 = 1 - 2\sqrt{-4x-3} - 4x - 3 \quad | \quad \text{Wurzel isolieren}$$

$$2\sqrt{-4x-3} = -9x - 7 \quad | \quad \text{Gleichung quadrieren}$$

$$-16x - 12 = 81x^2 + 126x + 49 \Leftrightarrow 81x^2 + 142x + 61 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-142 \pm \sqrt{20164 - 19764}}{162} = \frac{-142 \pm 20}{162}$$

$x_1 = -\frac{61}{81}$  ist keine Lösung,  $x_2 = -1$  ist Lösung der ursprünglichen Gleichung.

Koeffizienten					Definitionsbereich	Lösungen		
a	b	c	d	e		x1	x2	
5	5	-4	-3	-1	-1.00 <= x <= -0.75	-1.00		1
4	-3	-2	6	-1	0.75 <= x <= 3.00	1.00		2
1	0	-2	4	-2	0.00 <= x <= 2.00	0.00		3
1	3	2	-2	2	x >= 1.00	1.00		4
3	-5	1	-2	1	x >= 2.00	2.00		5
3	-5	1	-2	1	x >= 2.00	2.00	3.00	6
5	4	2	0	2	x >= 0.00	0.00		7
1	-5	4	0	-4	x >= 5.00	9.00		8
2	-1	1	3	-1	x >= 0.50	1.00		9
6	4	2	5	1	x >= -0.67	2.00		10
1	5	3	3	2	x >= -1.00	-1.00		11
2	1	1	-4	3	x >= 4.00	4.00		12
6	4	-2	1	1	-0.67 <= x <= 0.50	0.00		13
4	0	2	-2	2	x >= 1.00	1.00		14
4	0	2	-2	2	x >= 1.00	1.00	9.00	15
2	-5	3	-5	-1	x >= 2.50	3.00		16
2	-5	3	-5	-1	x >= 2.50	3.00	7.00	17
2	2	-2	3	1	-1.00 <= x <= 1.50	1.00		18
3	4	-4	0	-1	-1.33 <= x <= 0.00	-1.00		19
7	-5	-1	6	1	0.71 <= x <= 6.00	2.00		20
3	4	2	0	2	x >= 0.00	0.00		21
3	1	4	4	-1	x >= -0.33	0.00		22
3	1	4	4	-1	x >= -0.33	0.00	8.00	23
4	-3	4	4	-1	x >= 0.75	3.00		24
6	1	1	4	-1	x >= -0.17	0.00		25
1	1	-1	3	2	-1.00 <= x <= 3.00	3.00		26
1	1	4	0	1	x >= 0.00	0.00		27
4	5	2	6	-1	x >= -1.25	-1.00		28
4	0	-3	4	1	0.00 <= x <= 1.33	1.00		29
2	-5	2	3	-2	x >= 2.50	3.00		30
1	1	-1	3	-2	-1.00 <= x <= 3.00	-1.00		31
3	1	1	-1	2	x >= 1.00	1.00		32
3	1	1	-1	2	x >= 1.00	1.00	5.00	33
4	5	-3	4	2	-1.25 <= x <= 1.33	1.00		34
1	4	3	0	2	x >= 0.00	0.00		35
7	2	3	3	1	x >= -0.29	2.00		36
3	1	4	5	-1	x >= -0.33	1.00		37
3	1	4	5	-1	x >= -0.33	1.00	5.00	38
7	4	-1	3	5	-0.57 <= x <= 3.00	3.00		39
2	-4	1	-1	-1	x >= 2.00	2.00		40
1	5	3	3	2	x >= -1.00	-1.00		41
7	2	-1	3	3	-0.29 <= x <= 3.00	2.00		42
5	4	-2	1	1	-0.80 <= x <= 0.50	0.00		43
1	-2	1	-5	1	x >= 5.00	6.00		44
1	-2	2	-3	-1	x >= 2.00	2.00		45
1	-2	2	-3	-1	x >= 2.00	2.00	6.00	46
4	5	1	-1	3	x >= 1.00	1.00		47
4	5	1	-1	3	x >= 1.00	1.00	5.00	48
4	4	1	-2	3	x >= 2.00	3.00		49
6	1	1	-4	5	x >= 4.00	4.00		50

Exponentialgleichungen

**Gegeben** sind Gleichungen vom Typ:  $a \cdot b^{cx+d} + e \cdot b^{fx+g} = h \cdot b^{mx+n}$ , welche auf die Form  $b^{f(x)} = b^{g(x)}$  gebracht werden können.

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle Exponentialgleichung mit der Basis 3 und der Variablen x.

**Beispiel:** Einsetzen der Zahlen der ersten Zeile ergibt die Gleichung.  $-9 \cdot 3^{2x+6} + 8 \cdot 3^{2x+8} = 7 \cdot 3^{9x-6}$

**Ermittle** die Lösung dieser Gleichung.

$$\begin{aligned}
 -9 \cdot 3^{2x+6} + 8 \cdot 3^{2x+8} &= 7 \cdot 3^{9x-6} \\
 3^{2x+6} (-9 + 8 \cdot 3^2) &= 7 \cdot 3^{9x-6} \\
 63 \cdot 3^{2x+6} &= 7 \cdot 3^{9x-6} \quad | :7 \\
 9 \cdot 3^{2x+6} &= 3^{9x-6} \\
 3^2 \cdot 3^{2x+6} &= 3^{9x-6} \\
 3^{2x+8} &= 3^{9x-6} \quad | \text{Gleichsetzen der Exponenten} \\
 2x + 8 &= 9x - 6 \Rightarrow 7x = 14 \Rightarrow x = 2
 \end{aligned}$$

Basis b	Koeffizienten										Lösung x
	a	c	d	e	f	g	h	m	n		
3	-9	2	6	8	2	8	7	9	-6	2.00	1
3	-6	5	4	-1	5	5	-1	-3	5	-1/8 =	-0.12
3	4	-9	-5	-3	-9	-6	1	-4	-2	-2/5 =	-0.40
3	-6	1	5	4	1	6	2	6	7	-1/5 =	-0.20
3	-9	7	1	0	7	5	-3	1	-5	-7/6 =	-1.17
3	6	1	-1	7	1	0	3	-3	-2	-3/4 =	-0.75
3	-3	5	-1	3	5	1	8	-2	-5	-5/7 =	-0.71
3	-9	7	-8	0	7	1	-3	9	9	-8.00	8
3	9	-8	-4	6	-8	-3	3	2	-6	2/5 =	0.40
3	3	-8	-7	8	-8	-6	9	3	1	-7/11 =	-0.64
3	6	4	5	0	4	2	2	-4	-2	-1.00	11
3	9	-1	5	-9	-1	4	2	7	-7	13/8 =	1.62
3	-3	5	-2	4	5	-1	1	-2	9	9/7 =	1.29
3	9	-6	-4	1	-6	-2	2	-9	3	5/3 =	1.67
3	6	0	0	2	0	1	4	-2	-7	-4.00	15
3	3	-1	6	6	-1	7	7	-7	-8	-5/2 =	-2.50
3	-3	2	7	0	2	5	-1	4	0	4.00	17
3	-9	9	-9	-5	-7	-7	-6	-1	-6	1/10 =	0.10
3	9	-7	-7	-6	-7	-6	-1	5	5	-5/6 =	-0.83
3	6	-9	6	0	-9	1	2	1	-6	13/10 =	1.30
3	-9	-5	1	0	-5	-2	-3	5	-8	1.00	21
3	9	-3	9	0	-3	3	1	-2	-8	19.00	22
3	-6	0	6	-2	0	8	-8	-9	-6	-13/9 =	-1.44
3	-9	5	-4	-2	5	-1	-7	-8	7	9/13 =	0.69
3	-9	-8	-2	2	-8	1	5	3	2	-2/11 =	-0.18
3	3	-5	2	-1	-5	5	-8	-2	-7	10/3 =	3.33
3	-3	-5	-2	0	-5	5	-1	-7	5	-1/2 =	-0.50
3	-6	-4	7	0	-4	5	-2	-7	-5	-13/3 =	-4.33
3	9	7	-1	1	7	0	4	4	-9	-3.00	29
3	6	-8	6	1	-8	8	5	8	6	1/16 =	0.06
3	-9	6	2	7	6	3	4	-6	-5	-2/3 =	-0.67
3	-9	-5	-9	0	-5	-4	-3	-9	-2	3/2 =	1.50
3	-9	-4	-4	-6	-4	-3	-3	-3	-3	1/7 =	0.14
3	-9	3	7	0	3	8	-1	-7	0	-9/10 =	-0.90
3	9	7	-4	-3	7	-2	-2	-4	7	9/11 =	0.82
3	-6	-1	1	-4	-1	2	-6	7	-4	3/4 =	0.75
3	-9	-2	2	-1	-2	4	-2	-8	8	2/3 =	0.67
3	6	0	7	9	0	6	3	5	-9	17/5 =	3.40
3	-3	0	8	-4	0	9	-5	2	-8	17/2 =	8.50
3	3	1	-2	-5	1	-1	-4	-1	-7	-3.00	40
3	9	2	-8	0	2	-1	1	9	6	-12/7 =	-1.71
3	9	-5	-5	0	-5	3	1	7	-3	0.00	42
3	-9	9	-5	0	9	-1	-3	8	6	10.00	43
3	9	9	-6	9	9	-7	4	-5	-6	-1/14 =	-0.07
3	3	5	-3	-7	5	-2	-6	6	2	-4.00	45
3	9	9	-4	0	9	0	1	-8	-6	-4/17 =	-0.24
3	-6	-9	1	-9	-9	-6	7	7	2	-5/8 =	-0.62
3	-9	6	-6	8	6	-5	5	1	8	13/5 =	2.60
3	-3	7	-9	1	7	-6	8	8	4	-12.00	49
3	-6	5	7	8	5	8	2	3	-3	-6.00	50

Exponentialgleichungen

**Gegeben** sind Gleichungen vom Typ:  $a \cdot b_1^{cx+d} + e \cdot b_2^{fx+g} = h \cdot b_1^{mx+n} + k \cdot b_2^{ux+v}$ , welche auf die Form  $p^{f(x)} = q^{f(x)}$  gebracht werden können.

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle Exponentialgleichung mit der Basen 2 und 3 und der Variablen x.

**Beispiel:** Einsetzen der Zahlen der ersten Zeile ergibt die Gleichung,  $2 \cdot 2^{x-1} + 3 \cdot 3^{x-2} = -2^{x-1} + 4 \cdot 3^{x-1}$

**Ermittle** die Lösung dieser Gleichung.

$$\begin{aligned}
 2 \cdot 2^{x-1} + 3 \cdot 3^{x-2} &= -2^{x-1} + 4 \cdot 3^{x-1} \\
 2 \cdot 2^{x-1} + 2^{x-1} &= 4 \cdot 3^{x-1} - 3 \cdot 3^{x-2} \\
 3 \cdot 2^{x-1} &= 3^{x-1} \cdot (4 - 3 \cdot 3^{-1}) \\
 3 \cdot 2^{x-1} &= 3^{x-1} \cdot 3 \\
 2^{x-1} &= 3^{x-1} \quad | \text{ Exponent gleich Null setzen!} \\
 x-1=0 &\Rightarrow x=1
 \end{aligned}$$

Basen		Koeffizienten											Lösung		
b1	b2	a	c	d	e	f	g	h	m	n	k	u	v	x	
2	3	2	1	-1	3	1	-2	-1	1	-1	4	1	-1	1.00	1
2	3	-4	-3	-2	2	-3	-2	-2	-3	-3	-3	-3	-3	-0.67	2
2	3	-4	-4	3	3	-4	3	-4	-4	1	0	-4	1	0.75	3
2	3	-2	4	3	2	4	3	2	4	3	2	4	1	-0.25	4
2	3	-1	-1	-1	3	-1	-2	-4	-1	-2	5	-1	-2	-2.00	5
2	3	1	-4	3	-2	-4	3	0	-4	4	-3	-4	2	0.75	6
2	3	1	3	5	3	3	2	0	3	-2	5	3	3	-1.00	7
2	3	-4	-4	-4	0	-4	1	-3	-4	-2	2	-4	-2	-0.50	8
2	3	3	-3	-1	4	-3	-1	3	-3	1	0	-3	-1	-1.00	9
2	3	4	-2	-2	3	-2	-1	0	-2	4	5	-2	-1	-0.50	10
2	3	-4	3	3	3	3	3	1	3	4	-3	3	3	-1.00	11
2	3	-2	-3	0	-1	-3	0	-3	-3	1	5	-3	-1	-0.33	12
2	3	2	3	-1	1	3	0	0	3	-3	2	3	0	0.00	13
2	3	-4	4	-1	1	4	1	1	4	-1	4	4	-1	0.25	14
2	3	1	1	0	1	1	-2	0	1	-2	5	1	-2	2.00	15
2	3	-4	-1	-2	-1	-1	-2	-4	-1	-1	3	-1	-2	-2.00	16
2	3	3	-2	2	-5	-2	0	1	-2	3	4	-2	0	1.00	17
2	3	1	-1	0	3	-1	-1	-1	-1	0	3	-1	0	0.00	18
2	3	-4	-4	-4	3	-4	-3	0	-4	4	0	-4	-2	-0.50	19
2	3	2	-3	-3	0	-3	-3	-1	-3	-1	4	-3	-3	-1.33	20
2	3	-4	4	0	0	4	-3	0	4	2	-4	4	0	0.00	21
2	3	-3	3	-4	0	3	2	-3	3	-2	1	3	-2	1.33	22
2	3	-2	3	3	-2	3	3	0	3	-5	0	3	3	-1.00	23
2	3	-3	-4	3	0	-4	-3	-4	-4	3	3	-4	2	0.75	24
2	3	2	4	1	-5	4	1	-1	4	3	-1	4	1	0.00	25
2	3	3	-2	0	0	-2	-2	-2	-2	-1	4	-2	0	0.00	26
2	3	-4	-2	2	0	-2	-3	0	-2	1	-4	-2	2	1.00	27
2	3	-1	-1	-3	0	-1	3	-4	-1	-4	1	-1	-3	-3.00	28
2	3	3	3	-2	0	3	0	3	3	-1	-2	3	-2	1.00	29
2	3	2	2	2	-3	2	1	0	2	0	-1	2	0	0.00	30
2	3	4	2	-3	-2	2	-3	0	2	-4	4	2	-3	1.00	31
2	3	2	1	2	-2	1	3	-4	1	0	-4	1	2	-1.00	32
2	3	-1	-2	2	3	-2	2	4	-2	1	0	-2	3	1.00	33
2	3	4	1	-4	0	1	1	4	1	-3	-1	1	-2	2.00	34
2	3	4	2	2	-1	2	4	0	2	-2	0	2	4	-2.00	35
2	3	-3	2	0	4	2	0	3	2	0	-2	2	0	0.00	36
2	3	-4	-3	-1	4	-3	-1	4	-3	-2	4	-3	-2	-1.00	37
2	3	2	-3	1	0	-3	-1	-2	-3	4	4	-3	2	0.00	38
2	3	4	-3	3	-4	-3	3	-2	-3	4	4	-3	3	1.00	39
2	3	1	1	-3	-1	1	-1	-4	1	-2	0	1	-3	3.00	40
2	3	4	-1	-1	-2	-1	0	0	-1	0	-2	-1	-1	-1.00	41
2	3	3	-2	4	0	-2	3	0	-2	4	4	-2	3	1.00	42
2	3	-1	4	4	0	4	-2	4	4	2	-2	4	4	-1.00	43
2	3	-3	3	0	0	3	3	2	3	-1	-4	3	0	0.00	44
2	3	-4	1	2	1	1	4	0	1	1	1	1	3	-3.00	45
2	3	4	3	3	0	3	-4	0	3	-2	4	3	3	-1.00	46
2	3	4	2	-4	-1	2	-3	-2	2	-4	3	2	-4	2.00	47
2	3	2	2	1	0	2	0	-4	2	-1	2	2	1	0.00	48
2	3	2	2	3	-2	2	2	0	2	-2	2	2	2	-1.00	49
2	3	4	1	-1	3	1	0	1	1	-1	4	1	0	1.00	50

Exponentialgleichungen

**Gegeben** sind Gleichungen vom Typ:  $a \cdot b_1^{cx+d} + e \cdot b_1^{fx+g} = h \cdot b_1^{mx+n} \cdot b_2^{ux+v}$ , welche durch Logarithmieren gelöst werden können.

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle Exponentialgleichung mit der Basen 2 und 3 und der Variablen x.

**Beispiel:** Einsetzen der Zahlen der ersten Zeile ergibt  $3 \cdot 2^{-3x-2} + 2 \cdot 2^{-3x-4} = 2^{-x+3} \cdot 3^{-4x+2}$

**Ermittle** die Lösung dieser Gleichung.

$$3 \cdot 2^{-3x-2} + 2 \cdot 2^{-3x-4} = 2^{-x+3} \cdot 3^{-4x+2}$$

$$2^{-3x-4} \cdot (3 \cdot 2^2 + 2) = 2^{-x+3} \cdot 3^{-4x+2}$$

$$\frac{14 \cdot 2^{-3x-4}}{2^{-x+3}} = 3^{-4x+2}$$

$$14 \cdot 2^{-2x-7} = 3^{-4x+2} \quad | \text{Gleichung logarithmieren}$$

$$\ln 14 + (-2x-7)\ln 2 = (-4x+2)\ln 3 \Leftrightarrow x(4\ln 3 - 2\ln 2) = 7\ln 2 + 2\ln 3 - \ln 14$$

$$x = \frac{7\ln 2 + 2\ln 3 - \ln 14}{4\ln 3 - 2\ln 2} \approx 1.47$$

Basen		Koeffizienten											Lösung	
b1	b2	a	c	d	e	f	g	h	m	n	u	v	x	
2	3	3	-3	-2	2	-3	-4	1	-1	3	-4	2	1.47	1
2	3	1	-1	-3	2	-1	2	4	-4	3	1	0	1.40	2
2	3	1	3	-4	0	3	2	4	-2	0	1	1	2.22	3
2	3	4	-2	0	2	-2	4	3	-1	3	0	-2	3.75	4
2	3	5	-1	1	-3	-1	0	3	-5	1	-1	5	1.38	5
2	3	0	-3	-5	1	-3	1	3	3	2	-4	4	26.26	6
2	3	1	0	5	1	0	2	2	3	-2	1	-5	3.07	7
2	3	3	0	5	1	0	-2	1	-1	-1	-2	5	0.08	8
2	3	4	-3	0	-1	-3	0	2	2	1	4	-3	0.38	9
2	3	1	3	-4	1	3	-1	1	2	2	-3	3	1.32	10
2	3	1	1	-1	1	1	-4	1	3	-3	1	0	0.61	11
2	3	2	2	5	0	2	-1	1	5	-2	3	4	0.21	12
2	3	2	1	2	2	1	-6	3	4	-2	3	2	0.03	13
2	3	5	4	1	-4	4	-5	4	-1	3	3	4	32.79	14
2	3	3	0	-5	0	0	0	4	2	-2	0	-3	0.67	15
2	3	1	2	0	0	2	-1	4	-2	3	-1	0	0.90	16
2	3	-5	-4	-2	2	-4	6	1	1	1	2	2	0.34	17
2	3	5	2	-3	2	2	-1	2	4	0	1	-1	0.36	18
2	3	5	-2	1	1	-2	-1	4	0	2	3	-1	0.14	19
2	3	4	4	3	-4	4	-2	1	1	-1	2	0	35.04	20
2	3	3	0	-2	-2	0	-3	4	-5	1	-3	3	0.90	21
2	3	0	-4	-3	1	-4	3	2	-2	1	4	0	0.12	22
2	3	2	3	5	0	3	3	3	2	-2	2	3	0.77	23
2	3	4	2	5	-2	2	1	3	0	2	-1	4	0.83	24
2	3	1	-3	2	-1	-3	-6	3	0	2	3	-4	0.61	25
2	3	4	-3	-3	2	-3	-4	3	-5	1	-4	4	1.15	26
2	3	5	4	-3	-3	4	-6	4	-2	1	-3	0	0.35	27
2	3	3	-3	2	-3	-3	-5	4	4	3	-1	-4	0.91	28
2	3	4	-4	5	2	-4	-2	2	-1	1	0	1	1.14	29
2	3	4	4	2	0	4	-4	1	4	-2	3	-4	2.60	30
2	3	5	2	1	-1	2	3	3	-3	-1	1	5	2.20	31
2	3	2	2	-2	0	2	5	4	-3	3	2	0	3.28	32
2	3	3	-1	5	-3	-1	-1	1	4	-2	4	2	0.48	33
2	3	3	-4	-1	-1	-4	-3	4	3	-1	-1	-4	1.07	34
2	3	5	3	5	0	3	-6	4	2	0	1	3	0.97	35
2	3	0	1	-5	2	1	3	4	-2	-1	-4	5	0.53	36
2	3	-1	4	-2	2	4	3	1	-5	-2	-3	5	0.14	37
2	3	1	4	1	1	4	4	4	-3	2	-2	3	0.45	38
2	3	5	-1	4	1	-1	6	4	0	0	1	2	0.77	39
2	3	2	2	-1	-1	2	-5	4	2	-1	-3	1	0.55	40
2	3	5	1	-2	2	1	-3	4	-2	2	-4	5	1.21	41
2	3	3	0	1	0	0	1	3	5	-3	0	-5	2.38	42
2	3	3	3	0	0	3	-1	3	0	-1	-3	5	0.89	43
2	3	3	2	0	1	2	-6	3	1	-2	1	-5	16.98	44
2	3	1	4	-1	-3	4	-4	3	3	0	-3	5	1.94	45
2	3	2	-3	5	-2	-3	3	3	1	1	0	-3	1.94	46
2	3	4	-4	-1	-3	-4	-1	3	-1	2	-4	3	2.80	47
2	3	1	3	-5	2	3	5	4	-1	3	3	0	1.33	48
2	3	2	-2	1	-4	-2	-4	1	-3	-1	-4	3	0.25	49
2	3	3	0	1	-3	0	-4	2	3	2	-2	0	2.71	50

Logarithmische Gleichungen

**Gegeben** sind Gleichungen vom Typ:  $\log(ax + b) + \log(cx + d) = \log(ex + f)$ , welche ohne Logarithmieren zu lösen sind.

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle logarithmische Gleichung in der Variablen x.

**Beispiel:** Einsetzen der Zahlen der ersten Zeile ergibt  $\log(4x - 7) + \log(-x + 7) = \log(3x - 1)$

**Ermittle** die Lösungen dieser Gleichung.

Definitionsbereich:  $4x - 7 > 0$  und  $-x + 7 > 0$  und  $3x - 1 > 0$   
 $x > 1.75$  und  $x < 7$  und  $x > 0.3$ , also  $1.75 < x < 7$

$$\log(4x - 7) + \log(-x + 7) = \log(3x - 1)$$

$$\log(4x - 7)(-x + 7) = \log(3x - 1) \quad | \text{ Numeri gleichsetzen}$$

$$-4x^2 + 35x - 49 = 3x - 1$$

$$4x^2 - 32x + 48 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 12} = 4 \pm 2$$

$$x_1 = 6, x_2 = 2$$

Koeffizienten			d	e	f	Definitionsbereich	Lösungen		
a	b	c					x1	x2	
4	-7	-1	7	3	-1	1.75 < x < 7.00	2.00	6.00	1
1	-6	4	-4	4	-4	x > 6.00	7.00		2
1	-2	3	-4	5	8	x > 2.00	5.00		3
1	3	-5	-6	-6	-8	-3.00 < x < -1.33	-2.00		4
-4	9	8	1	4	9	-0.12 < x < 2.25	0.00	2.00	5
1	-3	1	-4	5	-8	x > 4.00	10.00		6
2	5	-1	4	1	8	-2.50 < x < 4.00	-2.00	3.00	7
-1	2	4	6	-6	0	-1.50 < x < 0.00	-1.00		8
1	8	1	-2	8	8	x > 2.00	6.00		9
-1	0	1	3	-7	-5	-3.00 < x < -0.71	-1.00		10
1	0	6	3	3	6	x > 0.00	1.00		11
1	2	3	4	1	8	x > -1.33	0.00		12
4	2	3	-2	-2	8	0.67 < x < 4.00	1.00		13
1	6	1	-5	4	-2	x > 5.00	7.00		14
3	-4	2	-5	7	-4	x > 2.50	4.00		15
-1	8	1	5	-8	-2	-5.00 < x < -0.25	-3.00		16
3	0	2	1	9	0	x > 0.00	1.00		17
-1	5	1	1	-7	5	-1.00 < x < 0.71	0.00		18
1	4	-1	0	-6	-3	-4.00 < x < -0.50	-1.00		19
2	-1	5	-8	-1	8	1.60 < x < 8.00	2.00		20
5	6	-7	-6	-2	-1	-1.20 < x < -0.86	-1.00	-1.00	21
-1	0	1	6	-7	-2	-6.00 < x < -0.29	-1.00		22
4	1	2	0	2	8	x > 0.00	1.00		23
2	5	-2	8	-6	0	-2.50 < x < 0.00	-2.00		24
-1	0	3	4	2	3	-1.33 < x < 0.00	-1.00	-1.00	25
1	3	-3	-2	1	6	-3.00 < x < -0.67	-2.00	-2.00	26
4	-7	4	1	8	-7	x > 1.75	2.00		27
1	-4	3	-3	9	0	x > 1.00	2.00		28
2	-9	4	0	4	0	x > 4.50	5.00		29
2	2	2	0	8	0	x > 0.00	1.00		30
3	9	3	4	-6	0	-1.33 < x < 0.00	-1.00		31
-3	9	1	6	-9	6	-6.00 < x < 0.67	-4.00		32
-6	9	5	-3	3	3	0.60 < x < 1.50	1.00	1.00	33
-3	-7	1	7	-1	5	-7.00 < x < -2.33	-6.00	-3.00	34
1	-1	1	-1	3	7	x > 1.00	6.00		35
3	3	9	1	3	3	x > -0.11	0.00		36
4	1	-9	-9	-9	9	-0.25 < x < 1.00	0.00		37
1	2	2	-7	9	0	x > 3.50	7.00		38
6	-3	7	-2	9	6	x > 0.50	1.00		39
-3	-5	1	6	-5	-6	-6.00 < x < -1.67	-4.00	-2.00	40
1	-2	7	2	9	-4	x > 2.00	3.00		41
4	-7	1	-3	9	-3	x > 3.00	6.00		42
-1	2	4	9	-1	2	-2.25 < x < 2.00	-2.00		43
-1	7	7	-5	5	7	0.71 < x < 7.00	1.00	6.00	44
-1	7	6	-4	4	8	0.67 < x < 7.00	1.00	6.00	45
1	2	-5	6	-4	7	-2.00 < x < 1.20	-1.00	1.00	46
1	2	1	6	4	9	x > -2.00	-1.00		47
1	8	-1	-1	-6	-6	-8.00 < x < -1.00	-2.00		48
1	-8	1	-4	9	-6	x > 8.00	19.00		49
1	-8	1	8	9	6	x > 8.00	14.00		50

Logarithmische Gleichungen

**Gegeben** sind Gleichungen vom Typ:  $\log(ax + b) - \log(cx + d) = \log(ex + f)$ , welche ohne Logarithmieren zu lösen sind.

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle logarithmische Gleichung in der Variablen x.

**Beispiel:** Einsetzen der Zahlen der ersten Zeile ergibt  $\log(x + 8) - \log(2x + 9) = \log(x + 2)$

**Ermittle** die Lösungen dieser Gleichung.

Definitionsbereich:  $x + 8 > 0$  und  $2x + 9 > 0$  und  $x + 2 > 0$   
 $x > -8$  und  $x > -4.5$  und  $x > -2$ , also  $x > -2$

$$\log(x + 8) - \log(2x + 9) = \log(x + 2)$$

$$\log \frac{x + 8}{2x + 9} = \log(x + 2) \quad | \text{ Numeri gleichsetzen}$$

$$\frac{x + 8}{2x + 9} = x + 2 \quad | \cdot (2x + 9)$$

$$x + 8 = (x + 2)(2x + 9) \Leftrightarrow x + 8 = 2x^2 + 13x + 18 \Leftrightarrow 2x^2 + 12x + 10 = 0$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 5} = -3 \pm 2$$

$x_1 = -1$  ist Lösung,  $x_2 = -5$  ist keine Lösung.

Koeffizienten			Definitionsbereich			Lösungen			
a	b	c	d	e	f	x1	x2		
1	8	2	9	1	2	-2.00 < x >	-2.00		1
-8	2	-7	-5	3	8	-2.67 < x <	-0.71	-1.00	2
6	8	1	8	1	0	x >	0.00		3
7	-8	1	2	1	-4	x >	4.00		4
-8	5	1	5	1	1	-1.00 < x <	0.62		5
3	4	8	9	-5	-4	-1.12 < x <	-0.80	-1.00	6
2	4	1	2	2	2	x >	-1.00		7
8	-8	4	8	1	-3	x >	3.00		8
3	3	1	-3	1	-1	x >	3.00		9
-5	2	-6	-5	1	8	-8.00 < x <	-0.83	-1.00	10
7	5	5	1	-3	5	-0.20 < x <	1.67	1.00	11
2	2	3	-7	1	-2	x >	2.33		12
-2	8	-2	6	1	0	0.00 < x <	3.00	2.00	13
-2	4	1	2	-1	2	-2.00 < x <	2.00		14
-6	-4	-2	0	1	2	-2.00 < x <	-0.67		15
-1	8	-1	8	4	5	-1.25 < x <	8.00		16
1	4	-1	8	2	-3	1.50 < x <	8.00	7.00	17
5	-5	1	-1	3	-7	x >	2.33		18
-8	-2	1	7	-1	6	-7.00 < x <	-0.25	-4.00	19
3	3	1	-7	1	-6	x >	7.00	13.00	20
-2	0	-1	0	6	8	-1.33 < x <	0.00	-1.00	21
-2	8	2	-4	1	-2	2.00 < x <	4.00	3.00	22
-8	-2	3	7	-5	4	-2.33 < x <	-0.25	-2.00	23
3	-2	1	-2	2	-3	x >	2.00		24
6	4	1	-2	2	-2	x >	2.00	6.00	25
-3	6	2	1	-3	6	-0.50 < x <	2.00	0.00	26
5	-5	2	7	1	-3	x >	3.00	4.00	27
-6	-9	-2	-1	4	9	-2.25 < x <	-1.50	-2.00	28
-7	6	-1	2	1	3	-3.00 < x <	0.86	0.00	29
-2	6	-1	3	3	-1	0.33 < x <	3.00	1.00	30
-2	3	6	-5	-8	9	0.83 < x <	1.12	1.00	31
-6	2	1	9	-2	-2	-9.00 < x <	-1.00	-5.00	32
7	-4	-2	5	3	-2	0.67 < x <	2.50	1.00	33
2	2	3	-5	2	2	x >	1.67	2.00	34
-2	4	-2	4	1	0	0.00 < x <	2.00	1.00	35
3	2	1	-4	1	-6	x >	6.00	11.00	36
-7	7	-7	7	1	3	-3.00 < x <	1.00	-2.00	37
-7	4	1	3	-5	8	-3.00 < x <	0.57	-2.00	38
-6	-9	1	9	-5	-1	-9.00 < x <	-1.50	-8.00	39
-9	9	-9	9	1	4	-4.00 < x <	1.00	-3.00	40
-6	6	8	6	-1	1	-0.75 < x <	1.00	0.00	41
6	7	4	5	2	3	x >	-1.17	-1.00	42
6	2	2	5	2	-6	x >	3.00	4.00	43
1	9	-8	9	9	1	-0.11 < x <	1.12	0.00	44
1	6	1	6	8	9	x >	-1.12	-1.00	45
3	9	1	3	5	-7	x >	1.40	2.00	46
6	4	1	3	1	-6	x >	6.00	11.00	47
-3	-1	1	7	1	3	-3.00 < x <	-0.33	-2.00	48
-6	4	1	2	-1	9	-2.00 < x <	0.67	-1.00	49
5	3	1	-1	2	9	x >	1.00	2.00	50

Logarithmische Gleichungen

**Gegeben** sind Gleichungen vom Typ:  $\log(ax + b) + \log(cx + d) = 2\log(ex + f)$ , welche ohne Logarithmieren zu lösen sind.

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle logarithmische Gleichung in der Variablen x.

**Beispiel:** Einsetzen der Zahlen der ersten Zeile ergibt  $\log(8x + 9) + \log(-x + 3) = 2\log(x + 3)$

**Ermittle** die Lösungen dieser Gleichung.

Definitionsbereich:  $8x + 9 > 0$  und  $-x + 3 > 0$  und  $x + 3 > 0$   
 $x > -1.13$  und  $x < 3$  und  $x > -3$ , also  $-1.13 < x < 3$

$$\log(8x + 9) + \log(-x + 3) = 2\log(x + 3)$$

$$\log(8x + 9)(-x + 3) = 2\log(x + 3) = \log(x + 3)^2 \quad | \text{ Numeri gleichsetzen}$$

$$-8x^2 + 15x + 27 = x^2 + 6x + 9$$

$$9x^2 - 9x - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0.5 \pm \sqrt{0.25 + 2} = 0.5 \pm 1.5$$

$$x_1 = 2, x_2 = -1$$

Koeffizienten			Definitionsbereich			Lösungen			
a	b	c	d	e	f	x1	x2		
8	9	-1	3	1	3	-1.12 < x < 3.00	2.00	-1.00	1
-2	4	-2	4	3	-1	0.33 < x < 2.00	1.00		2
-5	9	3	1	4	3	x < -0.33	8.00	0.00	3
-5	9	-2	4	-3	6	x < 1.80	0.00		4
-4	7	-3	9	-3	9	x < 1.75	-2.00		5
3	5	8	-8	5	-5	x > 1.00	65.00		6
-3	-8	-1	1	2	8	-4.00 < x < -2.67	-3.00		7
-4	-8	-2	-7	-2	-4	x < -3.50	-5.00		8
3	6	2	-1	3	-6	x > 2.00	14.00		9
8	0	-7	9	-5	9	0.00 < x < 1.29	1.00	1.00	10
-9	-9	-3	-9	-5	-9	x < -3.00	-9.00		11
-1	7	2	-8	1	-4	4.00 < x < 7.00	6.00		12
-3	6	-2	-4	-2	4	x < -2.00	-10.00		13
-5	0	-1	-8	-1	0	x < -8.00	-10.00		14
6	4	8	-6	7	-1	x > 0.75	5.00	5.00	15
8	-7	-1	5	1	1	0.88 < x < 5.00	4.00	1.00	16
-3	6	-6	-5	-1	2	x < -0.83	-1.00		17
-7	-6	-2	2	-1	1	x < -0.86	-1.00		18
-4	4	-7	1	-2	2	x < 0.14	0.00		19
-5	5	5	5	5	5	-1.00 < x < 1.00	0.00		20
2	2	1	7	2	2	x > -1.00	5.00		21
3	-9	1	5	3	-9	x > 3.00	7.00		22
-7	1	-3	9	-4	7	x < 0.14	-2.00		23
-6	2	-1	2	-1	7	x < 0.33	-3.00		24
-1	5	-7	-1	-3	3	x < -0.14	-1.00	-7.00	25
1	9	1	9	3	7	x > -2.33	1.00		26
5	-4	6	-6	6	-6	x > 1.00	2.00		27
-1	7	-3	-1	5	9	-1.80 < x < -0.33	-1.00		28
1	0	-1	2	1	0	0.00 < x < 2.00	1.00		29
-6	4	-3	1	4	2	-0.50 < x < 0.33	0.00		30
-7	3	-5	9	-6	6	x < 0.43	-3.00	-3.00	31
-1	5	-7	-3	-3	3	x < -0.43	-3.00	-4.00	32
-6	-9	-4	-8	-5	-9	x < -2.00	-3.00	-3.00	33
-9	-7	-2	0	-2	0	x < -0.78	-1.00		34
9	-9	2	6	6	-6	x > 1.00	5.00		35
1	-2	2	6	2	-4	x > 2.00	7.00		36
8	8	3	-3	5	-5	x > 1.00	49.00		37
-1	8	-1	8	2	-7	3.50 < x < 8.00	5.00		38
9	0	7	-3	8	-2	x > 0.43	4.00	1.00	39
7	-5	8	0	9	-5	x > 0.71	1.00	1.00	40
6	-7	4	5	5	-1	x > 1.17	6.00	6.00	41
1	5	3	-9	3	-9	x > 3.00	7.00		42
-5	0	-3	6	-3	6	x < 0.00	-3.00		43
-5	-1	4	8	4	8	-2.00 < x < -0.20	-1.00		44
-1	5	2	2	1	1	-1.00 < x < 5.00	3.00		45
-9	9	-1	1	-1	9	x < 1.00	-3.00		46
-9	9	-4	4	8	6	-0.75 < x < 1.00	0.00		47
-1	8	-7	2	-5	4	x < 0.29	0.00	-1.00	48
7	0	5	1	6	0	x > 0.00	7.00		49
-7	6	-3	6	5	6	-1.20 < x < 0.86	0.00		50

**Logarithmische Gleichungen**

**Gegeben** sind Gleichungen vom Typ:  $a^{\lg(bx+c)} = d$ , welche durch Logarithmieren zu lösen sind. Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle logarithmische Gleichung in der Variablen x.

**Beispiel:** Einsetzen der Zahlen der ersten Zeile ergibt die Gleichung  $8^{\lg(-x+3)} = 6$

**Ermittle** die Lösungen dieser Gleichung.

Definitionsbereich:  $-x + 3 > 0 \Rightarrow x < 3$

$$8^{\lg(-x+3)} = 6$$

$$\lg(-x+3) \cdot \lg 8 = \lg 6 \quad | : \lg 8$$

$$\lg(-x+3) = \frac{\lg 6}{\lg 8} \approx 0.86$$

$$10^{\lg(-x+3)} = 10^{0.86}$$

$$-x + 3 \approx 7.27$$

$$x \approx -4.27$$

Koeffizienten				Definitionsbereich	Lösung x	
a	b	c	d			
8	-1	3	6	x < 3.00	-4.27	1
2	-8	-3	6	x < -0.38	-48.44	2
9	7	-4	6	x > 0.57	1.51	3
5	1	-4	6	x > 4.00	16.98	4
4	9	1	5	x > -0.11	1.50	5
4	7	-7	7	x > 1.00	4.62	6
6	1	5	3	x > -5.00	-0.90	7
7	-2	9	5	x < 4.50	1.14	8
3	-1	-7	5	x < -7.00	-36.17	9
3	-2	-9	1	x < -4.50	-5.00	10
4	-8	1	6	x < 0.12	-2.33	11
9	5	-8	1	x > 1.60	1.80	12
5	9	4	4	x > -0.44	0.36	13
3	-3	2	8	x < 0.67	-25.37	14
3	6	6	9	x > -1.00	15.67	15
4	-4	-5	5	x < -1.25	-4.87	16
6	-2	2	7	x < 1.00	-5.10	17
7	5	6	6	x > -1.20	0.47	18
5	-2	7	6	x < 3.50	-2.99	19
8	-8	-3	5	x < -0.38	-1.12	20
8	5	7	3	x > -1.40	-0.72	21
6	-8	-1	9	x < -0.12	-2.23	22
4	8	2	4	x > -0.25	1.00	23
5	-4	-2	2	x < -0.50	-1.17	24
9	5	8	8	x > -1.60	0.17	25
8	-7	6	5	x < 0.86	0.01	26
2	-4	-5	1	x < -1.25	-1.50	27
7	4	-9	4	x > 2.25	3.54	28
3	6	6	1	x > -1.00	-0.83	29
2	-7	-4	5	x < -0.57	-30.55	30
5	8	-3	8	x > 0.38	2.82	31
9	-3	-4	4	x < -1.33	-2.76	32
5	9	-3	7	x > 0.33	2.13	33
2	6	1	4	x > -0.17	16.50	34
4	-3	7	3	x < 2.33	0.27	35
7	-8	-7	3	x < -0.88	-1.33	36
8	1	6	8	x > -6.00	4.00	37
8	-5	5	3	x < 1.00	0.32	38
6	8	0	3	x > 0.00	0.51	39
8	2	-4	6	x > 2.00	5.64	40
8	-7	2	2	x < 0.29	-0.02	41
4	-3	-1	9	x < -0.33	-13.15	42
8	9	-2	6	x > 0.22	1.03	43
5	-6	7	8	x < 1.17	-2.10	44
3	8	-6	9	x > 0.75	13.25	45
4	3	5	2	x > -1.67	-0.61	46
7	4	1	6	x > -0.25	1.83	47
2	-6	7	9	x < 1.17	-245.31	48
8	1	0	4	x > 0.00	4.64	49
5	6	5	7	x > -0.83	1.86	50



— Goniometrische Gleichungen mit einer trigonometrischen Funktion —

**Gegeben** sind Gleichungen vom Typ:  $a \cdot \sin(bx) = c$

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle goniometrische Gleichung in der Variablen  $x$ .

**Beispiel:** Einsetzen der Zahlen der ersten Zeile ergibt die Gleichung  $2 \cdot \sin(2x) = 1$

**Ermittle** die Lösungen dieser Gleichung im Gradmaß.

$$2 \cdot \sin(2x) = 1$$

$$\sin(2x) = 0.5$$

$$2x = \arcsin 0.5 = 30^\circ + n \cdot 360^\circ, n \in \mathbb{Z} \text{ oder } 2x = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ + n \cdot 360^\circ, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 15^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in \mathbb{Z} \text{ oder } x = 75^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in \mathbb{Z}$$

Im Standardintervall  $[0^\circ; 360^\circ]$  liegen die Lösungen  $15^\circ, 75^\circ, 195^\circ, 255^\circ$ .

Koeffizienten			Lösungen		Periode (n ganzzahlig)	
a	b	c	x1	x2		
2	2	1	15.00	75.00	+ 180.00 · n	1
-6	1	-6	90.00		+ 360.00 · n	2
6	2	6	45.00		+ 180.00 · n	3
4	1	2	30.00	150.00	+ 360.00 · n	4
-7	1	-7	90.00		+ 360.00 · n	5
9	2	9	45.00		+ 180.00 · n	6
9	1	9	90.00		+ 360.00 · n	7
-7	2	-7	45.00		+ 180.00 · n	8
6	2	3	15.00	75.00	+ 180.00 · n	9
4	1	4	90.00		+ 360.00 · n	10
7	1	7	90.00		+ 360.00 · n	11
2	1	2	90.00		+ 360.00 · n	12
-5	2	-5	45.00		+ 180.00 · n	13
6	2	3	15.00	75.00	+ 180.00 · n	14
4	2	2	15.00	75.00	+ 180.00 · n	15
2	2	1	15.00	75.00	+ 180.00 · n	16
-5	2	-5	45.00		+ 180.00 · n	17
5	1	5	90.00		+ 360.00 · n	18
6	2	3	15.00	75.00	+ 180.00 · n	19
9	1	9	90.00		+ 360.00 · n	20
-8	2	-4	15.00	75.00	+ 180.00 · n	21
2	2	1	15.00	75.00	+ 180.00 · n	22
-8	2	-4	15.00	75.00	+ 180.00 · n	23
-8	2	-8	45.00		+ 180.00 · n	24
-2	2	-2	45.00		+ 180.00 · n	25
6	1	3	30.00	150.00	+ 360.00 · n	26
5	1	5	90.00		+ 360.00 · n	27
2	1	1	30.00	150.00	+ 360.00 · n	28
-9	2	-9	45.00		+ 180.00 · n	29
-5	2	-5	45.00		+ 180.00 · n	30
-2	1	-1	30.00	150.00	+ 360.00 · n	31
3	1	3	90.00		+ 360.00 · n	32
5	2	5	45.00		+ 180.00 · n	33
1	1	1	90.00		+ 360.00 · n	34
7	2	7	45.00		+ 180.00 · n	35
-8	1	-4	30.00	150.00	+ 360.00 · n	36
-2	1	-1	30.00	150.00	+ 360.00 · n	37
-6	1	-6	90.00		+ 360.00 · n	38
9	1	9	90.00		+ 360.00 · n	39
-4	1	-2	30.00	150.00	+ 360.00 · n	40
7	2	7	45.00		+ 180.00 · n	41
-2	1	-2	90.00		+ 360.00 · n	42
9	1	9	90.00		+ 360.00 · n	43
-7	2	-7	45.00		+ 180.00 · n	44
-4	1	-2	30.00	150.00	+ 360.00 · n	45
-1	2	-1	45.00		+ 180.00 · n	46
-2	1	-2	90.00		+ 360.00 · n	47
8	2	4	15.00	75.00	+ 180.00 · n	48
-7	1	-7	90.00		+ 360.00 · n	49
-8	2	-4	15.00	75.00	+ 180.00 · n	50

— Goniometrische Gleichungen mit einer trigonometrischen Funktion —

**Gegeben** sind Gleichungen vom Typ:  $a \cdot \cos(bx) = c$

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle goniometrische Gleichung in der Variablen  $x$ .

**Beispiel:** Einsetzen der Zahlen der ersten Zeile ergibt die Gleichung  $4 \cdot \cos(2x) = 3$

**Ermittle** die Lösungen dieser Gleichung im Bogenmaß.

$$4 \cdot \cos(2x) = 3$$

$$\cos(2x) = 0.75$$

$$2x = \arccos 0.75 \approx 0.72 + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z} \text{ oder } 2x \approx 2\pi - 0.72 \approx 5.56 + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$x \approx 0.36 + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z} \text{ oder } x \approx 2.78 + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}$$

Im Standardintervall  $[0; 2\pi]$  liegen die Lösungen 0.36, 2.78, 3.50, 5.92.

Koeffizienten			Lösungen		Periode (n ganzzahlig)	
a	b	c	x1	x2		
4	2	3	0.36	2.78	+ 3.14 · n	1
-9	2	-9	0.00	3.14	+ 3.14 · n	2
-2	1	-1	1.05	5.24	+ 6.28 · n	3
3	1	1	1.23	5.05	+ 6.28 · n	4
-7	1	-3	1.13	5.16	+ 6.28 · n	5
7	1	2	1.28	5.00	+ 6.28 · n	6
6	1	5	0.59	5.70	+ 6.28 · n	7
9	2	2	0.67	2.47	+ 3.14 · n	8
5	2	4	0.32	2.82	+ 3.14 · n	9
5	2	1	0.68	2.46	+ 3.14 · n	10
-8	2	-3	0.59	2.55	+ 3.14 · n	11
-8	1	-5	0.90	5.39	+ 6.28 · n	12
6	2	1	0.70	2.44	+ 3.14 · n	13
9	1	4	1.11	5.17	+ 6.28 · n	14
-9	2	-7	0.34	2.80	+ 3.14 · n	15
-6	1	-1	1.40	4.88	+ 6.28 · n	16
2	1	2	0.00	6.28	+ 6.28 · n	17
1	2	1	0.00	3.14	+ 3.14 · n	18
9	1	6	0.84	5.44	+ 6.28 · n	19
6	2	3	0.52	2.62	+ 3.14 · n	20
3	2	2	0.42	2.72	+ 3.14 · n	21
-8	2	-4	0.52	2.62	+ 3.14 · n	22
8	2	6	0.36	2.78	+ 3.14 · n	23
4	2	2	0.52	2.62	+ 3.14 · n	24
-2	2	-2	0.00	3.14	+ 3.14 · n	25
8	1	3	1.19	5.10	+ 6.28 · n	26
-9	2	-8	0.24	2.90	+ 3.14 · n	27
4	1	1	1.32	4.97	+ 6.28 · n	28
-6	1	-6	0.00	6.28	+ 6.28 · n	29
5	1	1	1.37	4.91	+ 6.28 · n	30
-6	2	-1	0.70	2.44	+ 3.14 · n	31
-5	1	-5	0.00	6.28	+ 6.28 · n	32
-5	2	-3	0.46	2.68	+ 3.14 · n	33
6	2	1	0.70	2.44	+ 3.14 · n	34
-7	2	-3	0.56	2.58	+ 3.14 · n	35
7	1	3	1.13	5.16	+ 6.28 · n	36
9	1	9	0.00	6.28	+ 6.28 · n	37
4	2	4	0.00	3.14	+ 3.14 · n	38
-6	1	-6	0.00	6.28	+ 6.28 · n	39
7	1	3	1.13	5.16	+ 6.28 · n	40
-9	2	-3	0.62	2.53	+ 3.14 · n	41
4	2	4	0.00	3.14	+ 3.14 · n	42
-7	1	-7	0.00	6.28	+ 6.28 · n	43
-9	2	-2	0.67	2.47	+ 3.14 · n	44
-7	2	-7	0.00	3.14	+ 3.14 · n	45
9	1	6	0.84	5.44	+ 6.28 · n	46
6	1	3	1.05	5.24	+ 6.28 · n	47
6	1	1	1.40	4.88	+ 6.28 · n	48
7	1	1	1.43	4.86	+ 6.28 · n	49
-2	1	-2	0.00	6.28	+ 6.28 · n	50

**— Goniometrische Gleichungen mit einer trigonometrischen Funktion —**

**Gegeben** sind Gleichungen vom Typ:  $a \cdot \tan(bx) = c$

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle goniometrische Gleichung in der Variablen  $x$ .

**Beispiel:** Einsetzen der Zahlen der ersten Zeile ergibt die Gleichung  $-7 \cdot \tan x = -9$

**Ermittle** die Lösungen dieser Gleichung im Gradmaß.

$$-7 \cdot \tan x = -9$$

$$\tan x = \frac{9}{7}$$

$$x = \arctan \frac{9}{7} \approx 52.13^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in \mathbb{Z}$$

Im Standardintervall  $[0^\circ; 360^\circ]$  liegen die Lösungen  $52.13^\circ, 232.13^\circ$ .

Koeffizienten			Lösung x	Periode (n ganzzahlig)	
a	b	c			
-7	1	-9	52.13	+ 180.00 · n	1
-8	2	9	24.18	+ 90.00 · n	2
-9	1	-1	6.34	+ 180.00 · n	3
-3	1	-8	69.44	+ 180.00 · n	4
1	1	2	63.43	+ 180.00 · n	5
-1	2	-3	35.78	+ 90.00 · n	6
6	1	2	18.43	+ 180.00 · n	7
1	2	7	40.93	+ 90.00 · n	8
-8	1	-5	32.01	+ 180.00 · n	9
-8	2	-9	24.18	+ 90.00 · n	10
-8	1	-4	26.57	+ 180.00 · n	11
-7	2	-1	4.07	+ 90.00 · n	12
4	2	5	25.67	+ 90.00 · n	13
-8	2	-7	20.59	+ 90.00 · n	14
-3	2	-7	33.40	+ 90.00 · n	15
4	2	8	31.72	+ 90.00 · n	16
1	2	7	40.93	+ 90.00 · n	17
7	2	7	22.50	+ 90.00 · n	18
-6	2	-2	9.22	+ 90.00 · n	19
5	2	8	29.00	+ 90.00 · n	20
-6	1	-1	9.46	+ 180.00 · n	21
-5	1	-3	30.96	+ 180.00 · n	22
4	1	6	56.31	+ 180.00 · n	23
1	2	3	35.78	+ 90.00 · n	24
8	1	2	14.04	+ 180.00 · n	25
-9	2	-4	11.98	+ 90.00 · n	26
-4	1	-8	63.43	+ 180.00 · n	27
-4	1	-2	26.57	+ 180.00 · n	28
9	1	3	18.43	+ 180.00 · n	29
-4	2	-1	7.02	+ 90.00 · n	30
-5	2	-2	10.90	+ 90.00 · n	31
5	2	7	27.23	+ 90.00 · n	32
8	2	3	10.28	+ 90.00 · n	33
-5	1	-3	30.96	+ 180.00 · n	34
9	2	5	14.53	+ 90.00 · n	35
4	2	5	25.67	+ 90.00 · n	36
-1	1	-1	45.00	+ 180.00 · n	37
-4	1	-1	14.04	+ 180.00 · n	38
6	2	5	19.90	+ 90.00 · n	39
5	2	2	10.90	+ 90.00 · n	40
-3	2	-9	35.78	+ 90.00 · n	41
-6	1	-6	45.00	+ 180.00 · n	42
-2	2	-9	38.74	+ 90.00 · n	43
-4	1	-2	26.57	+ 180.00 · n	44
4	2	7	30.13	+ 90.00 · n	45
-1	1	-5	78.69	+ 180.00 · n	46
-6	2	-9	28.15	+ 90.00 · n	47
2	2	1	13.28	+ 90.00 · n	48
9	2	8	20.82	+ 90.00 · n	49
5	1	1	11.31	+ 180.00 · n	50

— Goniometrische Gleichungen mit zwei trigonometrischen Funktionen —

**Gegeben** sind Gleichungen vom Typ:  $a \cdot \sin(bx) = c \cdot \cos(bx)$

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle goniometrische Gleichung in der Variablen  $x$ .

**Beispiel:** Einsetzen der Zahlen der ersten Zeile ergibt die Gleichung  $3 \cdot \sin(2x) = 7 \cdot \cos(2x)$

**Ermittle** die Lösungen dieser Gleichung im Gradmaß.

$$3 \cdot \sin(2x) = 7 \cdot \cos(2x)$$

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{7}{3} \Leftrightarrow \tan 2x = \frac{7}{3}$$

$$2x = \arctan \frac{7}{3} \approx 66.80^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \approx 33.40^\circ + n \cdot 90^\circ, n \in \mathbb{Z}$$

Im Standardintervall  $[0^\circ, 360^\circ]$  liegen die Lösungen  $33.40^\circ, 123.40^\circ, 213.40^\circ, 303.40^\circ$

Koeffizienten			Lösung x	Periode (n ganzzahlig)	
a	b	c			
3	2	7	33.40	+ 90.00 · n	1
3	1	3	45.00	+ 180.00 · n	2
9	2	6	16.85	+ 90.00 · n	3
7	1	7	45.00	+ 180.00 · n	4
7	2	4	14.87	+ 90.00 · n	5
7	2	1	4.07	+ 90.00 · n	6
-2	1	-9	77.47	+ 180.00 · n	7
-7	2	-3	11.60	+ 90.00 · n	8
5	1	1	11.31	+ 180.00 · n	9
-1	2	-8	41.44	+ 90.00 · n	10
-8	2	-9	24.18	+ 90.00 · n	11
5	1	2	21.80	+ 180.00 · n	12
3	1	6	63.43	+ 180.00 · n	13
-1	1	-9	83.66	+ 180.00 · n	14
6	1	3	26.57	+ 180.00 · n	15
5	2	4	19.33	+ 90.00 · n	16
-7	1	-5	35.54	+ 180.00 · n	17
3	2	6	31.72	+ 90.00 · n	18
-8	1	-3	20.56	+ 180.00 · n	19
-5	1	-5	45.00	+ 180.00 · n	20
2	1	6	71.57	+ 180.00 · n	21
-3	2	-5	29.52	+ 90.00 · n	22
8	1	9	48.37	+ 180.00 · n	23
-3	2	-4	26.57	+ 90.00 · n	24
1	1	3	71.57	+ 180.00 · n	25
2	1	5	68.20	+ 180.00 · n	26
-2	1	-1	26.57	+ 180.00 · n	27
-6	1	-5	39.81	+ 180.00 · n	28
1	1	7	81.87	+ 180.00 · n	29
7	1	3	23.20	+ 180.00 · n	30
9	2	5	14.53	+ 90.00 · n	31
-8	1	-2	14.04	+ 180.00 · n	32
-2	2	-6	35.78	+ 90.00 · n	33
5	1	2	21.80	+ 180.00 · n	34
-4	2	-5	25.67	+ 90.00 · n	35
1	2	8	41.44	+ 90.00 · n	36
1	1	3	71.57	+ 180.00 · n	37
-4	2	-4	22.50	+ 90.00 · n	38
-7	1	-7	45.00	+ 180.00 · n	39
8	2	9	24.18	+ 90.00 · n	40
-4	1	-9	66.04	+ 180.00 · n	41
-4	2	-2	13.28	+ 90.00 · n	42
8	1	6	36.87	+ 180.00 · n	43
4	1	5	51.34	+ 180.00 · n	44
9	2	1	3.17	+ 90.00 · n	45
5	1	3	30.96	+ 180.00 · n	46
8	2	9	24.18	+ 90.00 · n	47
-7	1	-5	35.54	+ 180.00 · n	48
-6	2	-3	13.28	+ 90.00 · n	49
1	2	3	35.78	+ 90.00 · n	50

— Goniometrische Gleichungen mit zwei trigonometrischen Funktionen —

**Gegeben** sind Gleichungen vom Typ:  $a \cdot \sin(bx) = c \cdot \tan(bx)$

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle goniometrische Gleichung in der Variablen  $x$ .

**Beispiel:** Einsetzen der Zahlen der ersten Zeile ergibt die Gleichung  $9 \cdot \sin x = 2 \cdot \tan x$

**Ermittle** die Lösungen dieser Gleichung im Bogenmaß.

$$9 \cdot \sin x = 2 \cdot \tan x \Leftrightarrow 9 \cdot \sin x = 2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x$$

$$9 \cdot \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \sin x \Leftrightarrow 9 \cdot \sin x \cdot \cos x - 2 \cdot \sin x = 0 \quad | \text{sinx herausheben}$$

$$\sin x \cdot (9 \cdot \cos x - 2) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}, \text{ oder } x \approx 3.14 + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$9 \cdot \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{2}{9} \Rightarrow x = \arccos \frac{2}{9} \approx 1.35 + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}, \text{ oder } x \approx 6.28 - 1.35 \approx 4.94 + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Im Standardintervall  $[0; 2\pi]$  liegen die Lösungen  $0, 1.35, 3.14, 4.94, 6.28$

Koeffizienten			Lösungen				Periode (n ganzzahlig)	
a	b	c	x1	x2	x3	x4		
9	1	2	0.00	1.35	3.14	4.94	+ 6.28 · n	1
3	2	2	0.00	0.42	1.57	2.72	+ 3.14 · n	2
-2	1	-1	0.00	1.05	3.14	5.24	+ 6.28 · n	3
8	1	1	0.00	1.45	3.14	4.84	+ 6.28 · n	4
9	2	7	0.00	0.34	1.57	2.80	+ 3.14 · n	5
3	1	3	0.00		3.14	6.28	+ 6.28 · n	6
-9	2	-9	0.00		1.57	3.14	+ 3.14 · n	7
6	1	6	0.00		3.14	6.28	+ 6.28 · n	8
-9	2	-6	0.00	0.42	1.57	2.72	+ 3.14 · n	9
2	1	1	0.00	1.05	3.14	5.24	+ 6.28 · n	10
-6	2	-1	0.00	0.70	1.57	2.44	+ 3.14 · n	11
4	2	1	0.00	0.66	1.57	2.48	+ 3.14 · n	12
4	2	3	0.00	0.36	1.57	2.78	+ 3.14 · n	13
-5	2	-5	0.00		1.57	3.14	+ 3.14 · n	14
-9	2	2	0.00	0.67	1.57	2.47	+ 3.14 · n	15
-6	2	-1	0.00	0.70	1.57	2.44	+ 3.14 · n	16
-9	1	-6	0.00	0.84	3.14	5.44	+ 6.28 · n	17
7	1	6	0.00	0.54	3.14	5.74	+ 6.28 · n	18
4	1	2	0.00	1.05	3.14	5.24	+ 6.28 · n	19
-8	2	-8	0.00		1.57	3.14	+ 3.14 · n	20
8	1	6	0.00	0.72	3.14	5.56	+ 6.28 · n	21
7	1	2	0.00	1.28	3.14	5.00	+ 6.28 · n	22
6	1	5	0.00	0.59	3.14	5.70	+ 6.28 · n	23
8	1	1	0.00	1.45	3.14	4.84	+ 6.28 · n	24
5	2	5	0.00		1.57	3.14	+ 3.14 · n	25
9	1	9	0.00		3.14	6.28	+ 6.28 · n	26
-9	2	-3	0.00	0.62	1.57	2.53	+ 3.14 · n	27
2	1	1	0.00	1.05	3.14	5.24	+ 6.28 · n	28
-4	1	-2	0.00	1.05	3.14	5.24	+ 6.28 · n	29
-9	1	5	0.00	0.98	3.14	5.30	+ 6.28 · n	30
-8	2	-5	0.00	0.45	1.57	2.69	+ 3.14 · n	31
-5	1	-3	0.00	0.93	3.14	5.36	+ 6.28 · n	32
-1	1	-1	0.00		3.14	6.28	+ 6.28 · n	33
-8	1	-8	0.00		3.14	6.28	+ 6.28 · n	34
-3	2	-3	0.00		1.57	3.14	+ 3.14 · n	35
-6	1	-5	0.00	0.59	3.14	5.70	+ 6.28 · n	36
6	2	2	0.00	0.62	1.57	2.53	+ 3.14 · n	37
4	2	2	0.00	0.52	1.57	2.62	+ 3.14 · n	38
-3	1	-1	0.00	1.23	3.14	5.05	+ 6.28 · n	39
8	2	1	0.00	0.72	1.57	2.42	+ 3.14 · n	40
6	1	1	0.00	1.40	3.14	4.88	+ 6.28 · n	41
-9	1	5	0.00	0.98	3.14	5.30	+ 6.28 · n	42
-5	1	-4	0.00	0.64	3.14	5.64	+ 6.28 · n	43
6	2	5	0.00	0.29	1.57	2.85	+ 3.14 · n	44
8	2	7	0.00	0.25	1.57	2.89	+ 3.14 · n	45
3	2	1	0.00	0.62	1.57	2.53	+ 3.14 · n	46
8	1	8	0.00		3.14	6.28	+ 6.28 · n	47
-2	1	-2	0.00		3.14	6.28	+ 6.28 · n	48
9	1	8	0.00	0.48	3.14	5.81	+ 6.28 · n	49
5	2	5	0.00		1.57	3.14	+ 3.14 · n	50

– Goniometrische Gleichungen mit Winkelfunktionen des einfachen und doppelten Winkels –

**Gegeben** sind Gleichungen vom Typ:  $a \cdot \sin(2bx) = c \cdot \sin(bx)$

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle goniometrische Gleichung in der Variablen  $x$ .

**Beispiel:** Einsetzen der Zahlen der ersten Zeile ergibt die Gleichung  $7 \cdot \sin(2x) = 5 \cdot \sin(x)$

**Ermittle** die Lösungen dieser Gleichung im Gradmaß.

$$7 \cdot \sin(2x) = 5 \cdot \sin(x)$$

$$7 \cdot 2 \cdot \sin x \cos x = 5 \cdot \sin(x)$$

$$\sin x(14 \cos x - 5) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \arcsin 0 = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ + n \cdot 360^\circ, n \in \mathbb{Z}$$

$$14 \cos x - 5 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{5}{14} \Rightarrow x = \arccos \frac{5}{14} \approx 69.08^\circ, 290.92^\circ + n \cdot 360^\circ, n \in \mathbb{Z}$$

Im Standardintervall  $[0^\circ; 360^\circ]$  liegen die Lösungen  $0^\circ, 69.08^\circ, 180^\circ, 290.92^\circ, 360^\circ$ .

Koeffizienten			Lösungen				Periode(n ganzzahlig)	
a	b	c	x1	x2	x3	x4		
7	1	5	0.00	69.08	180.00	290.92	+ 360.00 · n	1
7	2	7	0.00	30.00	90.00	150.00	+ 180.00 · n	2
-9	1	-3	0.00	80.41	180.00	279.59	+ 360.00 · n	3
6	1	7	0.00	54.31	180.00	305.69	+ 360.00 · n	4
-6	2	-6	0.00	30.00	90.00	150.00	+ 180.00 · n	5
-3	1	-6	0.00		180.00	360.00	+ 360.00 · n	6
-4	1	7	0.00	151.04	180.00	208.96	+ 360.00 · n	7
-6	1	-6	0.00	60.00	180.00	300.00	+ 360.00 · n	8
4	1	1	0.00	82.82	180.00	277.18	+ 360.00 · n	9
-4	2	-6	0.00	20.70	90.00	159.30	+ 180.00 · n	10
7	1	9	0.00	49.99	180.00	310.01	+ 360.00 · n	11
5	2	-4	0.00	56.79	90.00	123.21	+ 180.00 · n	12
1	2	2	0.00		90.00	180.00	+ 180.00 · n	13
-8	1	2	0.00	97.18	180.00	262.82	+ 360.00 · n	14
7	1	6	0.00	64.62	180.00	295.38	+ 360.00 · n	15
4	2	1	0.00	41.41	90.00	138.59	+ 180.00 · n	16
5	2	1	0.00	42.13	90.00	137.87	+ 180.00 · n	17
-9	2	-3	0.00	40.20	90.00	139.80	+ 180.00 · n	18
6	1	-4	0.00	109.47	180.00	250.53	+ 360.00 · n	19
8	2	-9	0.00	62.11	90.00	117.89	+ 180.00 · n	20
-8	2	7	0.00	57.97	90.00	122.03	+ 180.00 · n	21
9	2	3	0.00	40.20	90.00	139.80	+ 180.00 · n	22
8	2	9	0.00	27.89	90.00	152.11	+ 180.00 · n	23
-8	1	1	0.00	93.58	180.00	266.42	+ 360.00 · n	24
-5	1	-7	0.00	45.57	180.00	314.43	+ 360.00 · n	25
-5	2	3	0.00	53.73	90.00	126.27	+ 180.00 · n	26
-9	1	8	0.00	116.39	180.00	243.61	+ 360.00 · n	27
-6	2	8	0.00	65.91	90.00	114.09	+ 180.00 · n	28
9	2	-7	0.00	56.44	90.00	123.56	+ 180.00 · n	29
-8	2	-2	0.00	41.41	90.00	138.59	+ 180.00 · n	30
-7	2	-4	0.00	36.70	90.00	143.30	+ 180.00 · n	31
7	1	1	0.00	85.90	180.00	274.10	+ 360.00 · n	32
2	2	3	0.00	20.70	90.00	159.30	+ 180.00 · n	33
8	1	2	0.00	82.82	180.00	277.18	+ 360.00 · n	34
5	2	-6	0.00	63.43	90.00	116.57	+ 180.00 · n	35
6	1	8	0.00	48.19	180.00	311.81	+ 360.00 · n	36
-5	2	8	0.00	71.57	90.00	108.43	+ 180.00 · n	37
6	1	-5	0.00	114.62	180.00	245.38	+ 360.00 · n	38
1	1	1	0.00	60.00	180.00	300.00	+ 360.00 · n	39
-9	1	9	0.00	120.00	180.00	240.00	+ 360.00 · n	40
5	2	-4	0.00	56.79	90.00	123.21	+ 180.00 · n	41
7	1	6	0.00	64.62	180.00	295.38	+ 360.00 · n	42
7	2	-4	0.00	53.30	90.00	126.70	+ 180.00 · n	43
6	2	-1	0.00	47.39	90.00	132.61	+ 180.00 · n	44
3	1	2	0.00	70.53	180.00	289.47	+ 360.00 · n	45
-3	2	1	0.00	49.80	90.00	130.20	+ 180.00 · n	46
8	1	7	0.00	64.06	180.00	295.94	+ 360.00 · n	47
7	2	3	0.00	38.81	90.00	141.19	+ 180.00 · n	48
8	1	9	0.00	55.77	180.00	304.23	+ 360.00 · n	49
8	1	3	0.00	79.19	180.00	280.81	+ 360.00 · n	50

– Goniometrische Gleichungen mit Winkelfunktionen des einfachen und doppelten Winkels –

**Gegeben** sind Gleichungen vom Typ:  $a \cdot \sin(2bx) = c \cdot \cos(bx)$

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle goniometrische Gleichung in der Variablen  $x$ .

**Beispiel:** Einsetzen der Zahlen der ersten Zeile ergibt die Gleichung  $8 \cdot \sin(2x) = 6 \cdot \cos(x)$

**Ermittle** die Lösungen dieser Gleichung im Gradmaß.

$$8 \cdot \sin(2x) = 6 \cdot \cos(x) \Leftrightarrow 4 \cdot \sin(2x) = 3 \cdot \cos(x)$$

$$4 \cdot 2 \cdot \sin x \cos x = 3 \cdot \cos(x)$$

$$\cos x (8 \sin x - 3) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \arccos 0 = 0^\circ, 270^\circ + n \cdot 360^\circ, n \in \mathbb{Z}$$

$$8 \sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{3}{8} \Rightarrow x = \arcsin \frac{3}{8} \approx 22.02^\circ, 157.98^\circ + n \cdot 360^\circ, n \in \mathbb{Z}$$

Im Standardintervall  $[0^\circ; 360^\circ]$  liegen die Lösungen  $22.02^\circ, 90^\circ, 157.98^\circ, 270^\circ$ .

Koeffizienten			Lösungen				Periode(n ganzzahlig)	
a	b	c	x1	x2	x3	x4		
8	1	6	22.02	90.00	157.98	270.00	+ 360.00 · n	1
7	2	8	17.42	45.00	72.58	135.00	+ 180.00 · n	2
-4	1	-4	30.00	90.00	150.00	270.00	+ 360.00 · n	3
8	2	1	1.79	45.00	88.21	135.00	+ 180.00 · n	4
5	2	-2	45.00	95.77	135.00	174.23	+ 180.00 · n	5
-7	2	5	45.00	100.46	135.00	169.54	+ 180.00 · n	6
-8	2	8	45.00	105.00	135.00	165.00	+ 180.00 · n	7
-7	2	-9	20.00	45.00	70.00	135.00	+ 180.00 · n	8
-4	1	-8	90.00			270.00	+ 360.00 · n	9
6	2	2	4.80	45.00	85.20	135.00	+ 180.00 · n	10
-8	1	-7	25.94	90.00	154.06	270.00	+ 360.00 · n	11
-6	1	2	90.00	189.59	270.00	350.41	+ 360.00 · n	12
9	1	-3	90.00	189.59	270.00	350.41	+ 360.00 · n	13
-8	2	-4	7.24	45.00	82.76	135.00	+ 180.00 · n	14
-8	2	-9	17.11	45.00	72.89	135.00	+ 180.00 · n	15
2	1	-4	90.00	270.00			+ 360.00 · n	16
-5	1	1	90.00	185.74	270.00	354.26	+ 360.00 · n	17
-5	1	-5	30.00	90.00	150.00	270.00	+ 360.00 · n	18
4	2	-6	45.00	114.30	135.00	155.70	+ 180.00 · n	19
8	1	-4	90.00	194.48	270.00	345.52	+ 360.00 · n	20
-8	1	4	90.00	194.48	270.00	345.52	+ 360.00 · n	21
-1	2	1	45.00	105.00	135.00	165.00	+ 180.00 · n	22
-7	1	-4	16.60	90.00	163.40	270.00	+ 360.00 · n	23
-6	2	-9	24.30	45.00	65.70	135.00	+ 180.00 · n	24
8	1	-4	90.00	194.48	270.00	345.52	+ 360.00 · n	25
8	1	-9	90.00	214.23	270.00	325.77	+ 360.00 · n	26
3	1	-1	90.00	189.59	270.00	350.41	+ 360.00 · n	27
-3	1	5	90.00	236.44	270.00	303.56	+ 360.00 · n	28
4	2	4	15.00	45.00	75.00	135.00	+ 180.00 · n	29
-6	1	8	90.00	221.81	270.00	318.19	+ 360.00 · n	30
3	2	2	9.74	45.00	80.26	135.00	+ 180.00 · n	31
3	2	-5	45.00	118.22	135.00	151.78	+ 180.00 · n	32
-7	1	3	90.00	192.37	270.00	347.63	+ 360.00 · n	33
-2	1	1	90.00	194.48	270.00	345.52	+ 360.00 · n	34
-5	2	4	45.00	101.79	135.00	168.21	+ 180.00 · n	35
-6	2	-5	12.31	45.00	77.69	135.00	+ 180.00 · n	36
2	2	-1	45.00	97.24	135.00	172.76	+ 180.00 · n	37
-2	2	-1	7.24	45.00	82.76	135.00	+ 180.00 · n	38
5	1	4	23.58	90.00	156.42	270.00	+ 360.00 · n	39
-6	1	-6	30.00	90.00	150.00	270.00	+ 360.00 · n	40
-1	1	-2	90.00	270.00			+ 360.00 · n	41
-2	2	3	45.00	114.30	135.00	155.70	+ 180.00 · n	42
-4	2	3	45.00	101.01	135.00	168.99	+ 180.00 · n	43
9	1	1	3.18	90.00	176.82	270.00	+ 360.00 · n	44
-8	2	3	45.00	95.40	135.00	174.60	+ 180.00 · n	45
3	1	-1	90.00	189.59	270.00	350.41	+ 360.00 · n	46
6	1	9	48.59	90.00	131.41	270.00	+ 360.00 · n	47
9	1	5	16.13	90.00	163.87	270.00	+ 360.00 · n	48
-8	2	-7	12.97	45.00	77.03	135.00	+ 180.00 · n	49
9	1	8	26.39	90.00	153.61	270.00	+ 360.00 · n	50

– Goniometrische Gleichungen mit Winkelfunktionen des einfachen und doppelten Winkels –

**Gegeben** sind Gleichungen vom Typ:  $a \cdot \cos(2(bx)) + c \cdot \sin(bx) = d$

Setzt man für die Koeffizienten jeweils Zahlen aus der untenstehenden Tabelle ein, so erhält man eine spezielle goniometrische Gleichung in der Variablen x.

**Beispiel:** Einsetzen der Zahlen der ersten Zeile ergibt die Gleichung  $9 \cdot \cos(2(2x)) - 8 \cdot \sin(2x) = 5$

**Ermittle** die Lösungen dieser Gleichung im Gradmaß.

$$9 \cdot \cos(2(2x)) - 8 \cdot \sin(2x) = 5$$

$$9 \cdot (1 - 2\sin^2(2x)) - 8 \cdot \sin(2x) = 5$$

$$18\sin^2(2x) + 8\sin(2x) - 4 = 0 \Leftrightarrow 9\sin^2(2x) + 4\sin(2x) - 2 = 0$$

$$(\sin(2x))_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 72}}{18} \approx \frac{-4 \pm 9.38}{18}$$

$$\sin(2x)_1 \approx 0.30 \Rightarrow 2x \approx \arcsin 0.30 \approx 17.39^\circ, 162.61^\circ + n \cdot 360^\circ, n \in \mathbb{Z}$$

$$x \approx 8.70^\circ, 81.30^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(2x)_2 \approx -0.74 \Rightarrow 2x \approx \arcsin -0.74 \approx 228.02^\circ, 311.98^\circ + n \cdot 360^\circ, n \in \mathbb{Z}$$

$$x \approx 114.01^\circ, 155.99^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in \mathbb{Z}$$

Im Standardintervall  $[0^\circ; 360^\circ]$  liegen die Lösungen  $8.70^\circ, 81.30^\circ, 114.01^\circ, 155.99^\circ, 188.70^\circ, 261.30^\circ, 294.01^\circ, 335.99^\circ$ .

Koeffizienten				Lösungen				Periode
a	b	c	d	x1	x2	x3	x4	(n ganzzahlig)
9	2	-8	5	8.70	81.30	114.01	155.99	+ 180.00 · n
5	1	-9	7	203.58	210.00	330.00	336.42	+ 360.00 · n
-8	2	8	-5	7.24	82.76	114.30	155.70	+ 180.00 · n
9	1	-1	4	30.00	150.00	213.75	326.25	+ 360.00 · n
7	1	2	3	37.64	142.36	207.89	332.11	+ 360.00 · n
-9	1	-4	3	69.25	110.75	225.47	314.53	+ 360.00 · n
5	2	-6	2	9.47	80.53	123.80	146.20	+ 180.00 · n
6	1	-6	3	18.00	162.00	234.00	306.00	+ 360.00 · n
9	2	8	0	37.23	52.77	105.63	164.37	+ 180.00 · n
8	2	-5	-1	18.79	71.21	123.64	146.36	+ 180.00 · n
6	1	-6	4	13.22	166.78	226.78	313.22	+ 360.00 · n
-7	2	-1	2	28.48	61.52	115.04	154.96	+ 180.00 · n
-9	1	3	-9	0.00	180.00	189.59	350.41	+ 360.00 · n
-8	2	-2	-5	15.00	75.00	101.01	168.99	+ 180.00 · n
-1	2	3	-2	105.00	135.00		165.00	+ 180.00 · n
-5	1	-1	-3	30.00	150.00	203.58	336.42	+ 360.00 · n
-9	1	-1	0	47.34	132.66	222.83	317.17	+ 360.00 · n
7	1	-9	2	20.92	159.08	270.00		+ 360.00 · n
5	1	7	5	0.00	44.43	135.57	180.00	+ 360.00 · n
9	2	-7	-1	17.58	72.42	127.37	142.63	+ 180.00 · n
6	1	8	2	90.00		199.47	340.53	+ 360.00 · n
-9	2	-9	-9	0.00	15.00	75.00	90.00	+ 180.00 · n
7	2	-4	7	0.00	90.00	98.30	171.70	+ 180.00 · n
9	1	1	4	33.75	146.25	210.00	330.00	+ 360.00 · n
9	1	5	9	0.00	16.13	163.87	180.00	+ 360.00 · n
-4	1	-5	-2	64.44	115.56	196.09	343.91	+ 360.00 · n
-9	2	-6	-2	27.15	62.85	104.30	165.70	+ 180.00 · n
7	1	-2	3	27.89	152.11	217.64	322.36	+ 360.00 · n
9	2	4	4	20.26	69.74	102.66	167.34	+ 180.00 · n
6	1	-3	3	22.98	157.02	219.82	320.18	+ 360.00 · n
-7	2	8	-7	0.00	90.00	107.42	162.58	+ 180.00 · n
9	2	1	-2	27.05	62.95	114.49	155.51	+ 180.00 · n
4	1	-5	3	9.17	170.83	231.66	308.34	+ 360.00 · n
4	1	2	4	0.00	14.48	165.52	180.00	+ 360.00 · n
-4	2	-5	-3	25.83	64.17	94.59	175.41	+ 180.00 · n
-9	2	-5	3	37.63	52.37	111.79	158.21	+ 180.00 · n
7	1	-7	1	26.79	153.21	251.95	288.05	+ 360.00 · n
-9	2	-2	-8	8.66	81.34	95.38	174.62	+ 180.00 · n
7	1	9	3	70.94	109.06	197.60	342.40	+ 360.00 · n
6	1	-2	0	38.95	141.05	232.69	307.31	+ 360.00 · n
9	2	-1	9	0.00	90.00	91.59	178.41	+ 180.00 · n
7	2	-8	1	12.69	77.31	135.00		+ 180.00 · n
4	1	1	-1	58.82	121.18	226.93	313.07	+ 360.00 · n
6	2	-6	2	11.14	78.86	120.77	149.23	+ 180.00 · n
-4	2	1	-4	0.00	90.00	93.59	176.41	+ 180.00 · n
-2	2	-2	0	45.00		105.00	165.00	+ 180.00 · n
-9	1	-1	-2	40.69	139.31	216.62	323.38	+ 360.00 · n
-6	1	-1	3	65.33	114.67	235.63	304.37	+ 360.00 · n
-8	1	3	-2	31.72	148.28	225.50	314.50	+ 360.00 · n
-9	2	-5	-1	27.54	62.46	106.41	163.59	+ 180.00 · n